El libro de problemas de matemáticas de Stanford

Con pistas y soluciones

George Polya
Jeremy Kilpatrick

Este volumen presenta una colección completa de problemas, pistas y soluciones basada en el conocido y competitivo examen de matemáticas de la Universidad de Stanford. Ofrece a los estudiantes de secundaria y de universidad un excelente libro de texto de matemáticas con problemas rigurosos que les ayudarán a desarrollar y cultivar sus habilidades lógicas y probabilísticas.

Esta fascinante compilación de una veintena de exámenes pone a prueba la originalidad y la perspicacia, más que la habilidad rutinaria. Los problemas obligan a teorizar y a verificar hechos matemáticos; a examinar los resultados de afirmaciones generales; a descubrir que algunas conjeturas que resultan muy plausibles pueden ser incorrectas; a resolver una serie de subproblemas que revelan la construcción de teorías, y a reconocer «pistas falsas», relaciones obvias entre los datos que resultan irrelevantes para las soluciones. Hay sugerencias para cada problema en una sección separada del libro, y en la sección final se presentan soluciones que describen los procedimientos apropiados.

El libro es ideal para profesores que buscan problemas prácticos de matemáticas que supongan un desafío para sus estudiantes más capacitados. También ayudará a los estudiantes a prepararse para los estudios de matemáticas, ciencias e ingeniería. Los aficionados a las matemáticas de todas las edades también encontrarán en él una fuente de cautivadores retos.

epublibre
X ANIVERSARIO

George Pólya & Jeremy Kilpatrick

El libro de problemas de matemáticas de Stanford

Con pistas y soluciones

ePub r1.2
Titivillus 20.09.2023

Título original: *The Stanford Mathematics Problem Book: With Hints and Solutions*
George Pólya & Jeremy Kilpatrick, 1974
Traducción: Titivillus
Diseño de cubierta: diego77

Editor digital: Titivillus
ePub base r2.1

Primera Parte

INTRODUCCIÓN

A lo largo de veinte años, de 1946 a 1965, el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Stanford implantó un sistema de exámenes competitivos destinados a estudiantes del último curso de bachillerato. El objetivo inmediato y principal del examen era identificar, entre los graduados de bachillerato de cada año, a estudiantes especialmente capaces con el fin de atraerlos a Stanford. El objetivo a una escala mayor era el de estimular el interés por las matemáticas entre los estudiantes de secundaria y entre los profesores en general, así como también entre el público.

El examen se inspiraba en el Concurso Eötvös [véase 23], que se organizó en Hungría en 1894 y que, al parecer, se inspiraba a su vez en concursos similares llevados a cabo en Inglaterra y Francia. Gabor Szegö, presidente del Departamento de Matemáticas de Stanford en 1946 y ganador del Concurso Eötvös en 1912, puso en marcha el examen de Stanford.

La creación del examen se basaba en la convicción de que una manifestación temprana de la capacidad matemática es un indicio inequívoco de una inteligencia excepcional y de idoneidad para el liderazgo intelectual en cualquier área. Además, la capacidad matemática puede detectarse a una edad comparativamente temprana porque se manifiesta «no tanto en la cantidad de conocimientos acumulados como en la originalidad mental mostrada al lidiar con problemas difíciles, aunque elementales» [2, p. 406].

Tal y como señaló Buck [1] hace unos años al analizar los concursos de matemáticas, un examen puede diseñarse, a grandes rasgos, bien para evaluar el rendimiento o bien para evaluar la aptitud. El concurso de matemáticas de la Universidad de Stanford pertenecía a este último tipo. Hacía hincapié en

> la originalidad y perspicacia, más que en la competencia rutinaria (…). Una pregunta típica puede requerir conocimientos específicos al alcance de los examinandos, pero exigirá emplearlos de formas poco habituales que requieran un alto grado de ingenio. De hecho, la pregunta puede introducir determinados conceptos que son desconocidos para el alumno. En suma, se le pide al alumno ganador que demuestre su capacidad para investigar [1, pp. 204-205].

En el primer examen de Stanford, en 1946, participaron 322 estudiantes de 60 institutos de California. El ganador conseguía una beca de un año de la Universidad de Stanford, y otros tres participantes recibían una mención honorífica y un libro de matemáticas. En 1953, el examen se amplió más allá de California para incluir Arizona, Oregón y Washington; el número de becas aumentó a dos, y el número de menciones honoríficas y libros se incrementó hasta una decena. De 1958 a 1962, el examen fue copatrocinado por Sylvania Electric Products, Inc. En el último examen, en 1965, participaron unos 1.200 estudiantes de 151 centros de California, Arizona, Idaho, Montana, Nevada, Oregón y Washington. Se concedieron premios en metálico

por valor de 500, 250 y 250 dólares a los tres ganadores, y menciones honoríficas y un libro de matemáticas a dieciocho participantes. El examen dejó de celebrarse después de 1965, principalmente porque el Departamento de Matemáticas de Stanford dirigió su interés hacia la enseñanza de postgrado.

Cada año se enviaban anuncios del examen a todos los institutos públicos y privados de cada uno de los estado en los que se iba a realizar. Las escuelas más grandes se designaban como centros, y los estudiantes del resto de escuelas podían examinarse donde les resultara más conveniente.

El examen tenía lugar un sábado por la tarde de marzo o abril, y estaba gestionado por profesores y personal escolar. Los participantes disponían de tres horas para resolver de tres a cinco problemas. Las instrucciones que se les daban eran las siguientes:

> No se pueden utilizar ni libros ni apuntes. Es posible que no pueda hacer todos los problemas en tres horas, pero lo que haga debe estar cuidadosamente trabajado. Se puede utilizar papel de sucio. Se puede utilizar lápiz o bolígrafo. No se deben hacer preguntas sobre el examen a la persona encargada.
>
> ¡*Se tendrá en cuenta* la buena presentación!
> Debe ser clara, concisa y completa.

Los exámenes eran revisados siguiendo un proceso en dos fases. En primer lugar, eran leídos por equipos de estudiantes de postgrado del Departamento de Matemáticas, incluyendo, en la medida de lo posible, algunos que tuvieran experiencia como profesores de secundaria. A cada equipo de dos estudiantes se le asignaba para revisar un problema de tantos exámenes como fuera posible. Los exámenes que contuvieran un mínimo establecido de soluciones buenas (por ejemplo, una y media o dos de cuatro) o alguna característica especial pasaban a la segunda fase. En esta segunda fase, todos los exámenes que hubieran superado la primera criba eran leídos por al menos un miembro del Departamento, y los trabajos que se consideraban con más posibilidades de ganar eran leídos por todos los profesores participantes.

Para facilitar la selección de los ganadores, los problemas se ajustaban de modo que solo unos pocos participantes fueran capaces de resolverlos todos. Por otra parte, para evitar que los estudiantes se frustraran, el primer problema solía ser más accesible que los demás, sobre todo en los últimos años, de modo que muchos participantes fueran capaces de resolverlo.

Aunque el contenido matemático de los problemas no superaba el del plan de estudios de bachillerato, estos eran de tipos que rara vez se encuentran en los libros de texto. El objetivo de tales problemas no era solo poner a prueba la originalidad de los alumnos, sino también enriquecer el programa de matemáticas de bachillerato

sugiriendo nuevas orientaciones para el trabajo de alumnos y profesores. Los tipos de problemas incluían: (1) «conjeturar y demostrar», en los que primero se adivinaba y luego se probaba un resultado matemático; (2) «evaluar consecuencias», en los que se comprobaban las implicaciones de una afirmación general; (3) «conjeturas erróneas», en los que una suposición muy plausible resultaba incorrecta; (4) «teorías a pequeña escala», en los que una secuencia de subproblemas ilustraba la construcción de alguna teoría, y (5) «pistas falsas», en los que una relación obvia entre los datos resultaba ser irrelevante para la solución [véanse 9; 19, pp. 160-161, ejer. 1; 21, p. 139, ejer. 14.23].

Los problemas eran como los que se ponen como ejemplos en *How to Solve It* [17], en los dos volúmenes de *Mathematics and Plausible Reasoning* [18, 19] y en los dos volúmenes de *Mathematical Discovery* [20, 21]. De hecho, muchos de los problemas aparecen, normalmente con sus soluciones, en uno u otro de esos libros.

La mayor parte de los problemas ha aparecido también en revistas. Los problemas y la lista de ganadores de cada examen entre 1946 y 1953 (excepto 1952) se publicaron en el *American Mathematical Monthly* [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], y el conjunto completo de problemas, junto con una Introducción (de la que esta es una adaptación), aparece en el número de junio-julio de 1973 de esa misma revista [24]. En el *California Mathematics Council Bulletin* se publicaron artículos con problemas, soluciones, comentarios y listas de ganadores entre 1953 y 1961 (excepto 1959) [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16].

Sin embargo, nunca antes se había publicado el conjunto completo de problemas, junto con pistas y soluciones para todos ellos. Se ha obtenido el permiso para publicar aquí el material que tenía *copyright*.

La **Segunda Parte** contiene el conjunto completo de problemas de los exámenes de matemáticas de la Universidad de Stanford. Están numerados secuencialmente, por año y número de problema, así: **46.1** designa el problema 1 del examen de 1946. El número es, además, un enlace a la solución del problema.

La **Tercera Parte** da una pista para cada problema. Las pistas están numeradas de modo que se correspondan con los problemas, y se llega a ellas a través del enlace **PISTA** que aparece al final de cada problema (el número de la pista es otro enlace que devuelve al enunciado). Las pistas son similares a las de la Parte IV de *How to Solve It* [17], y la mayoría de ellas utilizan una o varias de las preguntas heurísticas y sugerencias tratadas en ese libro.

La **Cuarta Parte** contiene una solución (a veces dos) para cada problema. La numeración es la misma que en los apartados anteriores (de nuevo, el número es un enlace al enunciado del problema). Las soluciones describen los procedimientos utilizados, pero algunos detalles se dejan, por supuesto, al lector. Algunas soluciones terminan con una indicación de las conexiones con otros problemas o con generalizaciones.

Las **Referencias** a artículos y libros en los que los problemas han aparecido anteriormente (con o sin soluciones) figuran entre paréntesis junto con las soluciones correspondientes en la **Cuarta Parte**.

Muchas de las pistas y soluciones proceden de debates en seminarios sobre resolución de problemas celebrados en la Universidad de Stanford y en el Teachers College. Los problemas han sido utilizados, por igual, para ilustrar técnicas de resolución de problemas con estudiantes de primer año, con futuros profesores y con profesores experimentados. Los profesores, y los profesores de profesores, pueden encontrar algunas sugerencias útiles sobre cómo utilizar los problemas en *Mathematical Discovery* [20, pp. 209-212].

Segunda Parte

PROBLEMAS

PROBLEMAS DE 1946

46.1. En un torneo de tenis hay $2n$ participantes. En la primera ronda del torneo cada participante juega una vez, de manera que habrá n juegos, cada uno de los cuales enfrenta dos de los jugadores. Pruebe que hay exactamente

$$1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times \ldots \times (2n - 1)$$

formas distintas de emparejar a los jugadores en la primera ronda.

PISTA

46.2. En un tetraedro (no necesariamente regular) dos lados opuestos tienen la misma longitud a y son perpendiculares entre sí. Además, ambos son perpendiculares a una línea de longitud b que une sus puntos medios. Exprese el volumen del tetraedro en términos de a y b, y pruebe su resultado.

PISTA

46.3. Considere las siguientes cuatro proposiciones, que no son necesariamente ciertas:

I. Si un polígono inscrito en un círculo es equilátero también es equiángulo.

II. Si un polígono inscrito en un círculo es equiángulo también es equilátero.

III. Si un polígono circunscrito en un círculo es equilátero también es equiángulo.

IV. Si un polígono circunscrito en un círculo es equiángulo también es equilátero.

A. Decida cuáles de estas cuatro proposiciones son ciertas y cuáles falsas, demostrando su afirmación en cada caso.

B. Si en lugar de polígonos generales se tratara de cuadriláteros, ¿cuáles de las cuatro proposiciones son ciertas y cuáles falsas? ¿Y si se tratara de pentágonos?

Al responder a (B) puede realizar conjeturas, pero demuéstrelas hasta donde pueda y separe claramente lo que haya demostrado de lo que haya dejado sin demostrar.

PISTA

PROBLEMAS DE 1947

47.1. Para numerar las páginas de un grueso volumen el impresor ha utilizado 1890 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el volumen?

PISTA

47.2. Entre los papeles del abuelo se encuentra la siguiente factura:

72 pavos —67.9— €.

La primera y última cifras del número que obviamente representa el precio total de esas aves están en blanco, ya que se han ido borrando y resultan ilegibles.

¿Cuáles eran las cifras desaparecidas y cuánto valía un pavo?

PISTA

47.3. Determine m de manera que la ecuación en x

$$x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$$

tenga cuatro raíces reales en progresión aritmética.

PISTA

47.4. Sean α, β y γ los ángulos de un triángulo. Demuestre que

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

y

$$\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma = -4\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma.$$

PISTA

PROBLEMAS DE 1948

48.1. Considere la tabla:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2 + 3 + 4 &= 1 + 8 \\ 5 + 6 + 7 + 8 + 9 &= 8 + 27 \\ 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 &= 27 + 64 \end{aligned}$$

Conjeture la ley general a partir de estos ejemplos, exprésela usando una notación matemática apropiada y demuéstrela.

PISTA

48.2. Tres números forman una progresión aritmética y otros tres, una progresión geométrica. Sumando sucesivamente los términos correspondientes de estas dos progresiones obtenemos, respectivamente, 85, 76 y 84, y sumando los tres términos de la progresión aritmética obtenemos 126. Halle los términos de ambas progresiones.

PISTA

48.3. Desde el pico de una montaña se ven dos puntos, *A* y *B*, en la planicie. Las líneas de visión, dirigidas a esos dos puntos, forman un ángulo γ. La inclinación de la primera línea de visión con un plano horizontal es α, y la de la segunda línea β. Se sabe que los puntos *A* y *B* están al mismo nivel y que la distancia entre ellos es *c*.

Exprese la elevación *x* del pico sobre el plano en que se encuentran *A* y *B* en términos de los ángulos α, β y γ y de la distancia *c* que los separa.

PISTA

48.4. Una esfera tiene radio r_1. En torno a ella se circunscribe un tetraedro regular. En torno a este tetraedro se circunscribe una segunda esfera de radio r_2. En torno a esta segunda esfera se circunscribe un cubo. En torno a este cubo se circunscribe una tercera esfera de radio r_3.

Encuentre las proporciones $r_1 : r_2 : r_3$ (que, según Kepler, deberían coincidir con las proporciones de las distancias medias del Sol a los planetas Marte, Júpiter y Saturno, pero que, de hecho, son bastante distintas de las auténticas proporciones).

PISTA

PROBLEMAS DE 1949

49.1. Pruebe que ningún número de la sucesión

$$11, 111, 1111, 11111, \ldots$$

es el cuadrado de un entero.

PISTA

49.2. Los tres lados de un triángulo tienen longitudes l, m y n, respectivamente. Los números l, m y n son enteros positivos tales que $l \leq m \leq n$.

A. Haga $n = 9$ y encuentre el número de triángulos diferentes del tipo descrito.

B. Elija varios valores de n y encuentre una ley general.

PISTA

49.3. (A) Demuestre el siguiente teorema: Un punto interior a un triángulo equilátero está a distancias x, y, z de los tres lados, respectivamente; h es la altura del triángulo. Entonces

$$x + y + z = h.$$

(B) Formule de manera precisa y demuestre el teorema análogo en geometría sólida, en relación con las distancias de un punto interior a las cuatro caras de un tetraedro regular.

(C) Generalice ambos teoremas de manera que se apliquen a cualquier punto del plano o del espacio, respectivamente (y no solo a puntos interiores del triángulo o del tetraedro). Proporcione formulaciones precisas y, si tiene tiempo, demuéstrelas.

PISTA

PROBLEMAS DE 1950

50.1. Observe que

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1 - 4 &= -(1 + 2) \\ 1 - 4 + 9 &= 1 + 2 + 3 \\ 1 - 4 + 9 - 16 &= -(1 + 2 + 3 + 4) \end{aligned}$$

Conjeture la ley general sugerida por estos ejemplos, exprésela usando una notación matemática adecuada y demuéstrela.

PISTA

50.2. Dado un cuadrado, encuentre el lugar de los puntos desde los cuales el cuadrado se ve con un ángulo (A) de 90° (B) de 45°. (Sea *P* un punto exterior al cuadrado, pero en el mismo plano. El ángulo más pequeño con vértice en *P* y que contenga al cuadrado es el «ángulo con el cual se ve el cuadrado» desde *P*.) Esboce claramente ambos conjuntos, descríbalos completamente y proporcione una demostración.

PISTA

50.3. Llamaremos «eje» de un sólido a la línea recta que une dos puntos de la superficie del sólido tal que el sólido, rotado sobre esa línea un ángulo mayor que 0° y menor que 360°, coincide consigo mismo.

Un cubo tiene 13 ejes distintos, de tres tipos diferentes. Describa claramente la localización de tales ejes y encuentre el ángulo de rotación asociado a cada uno de ellos. Suponiendo que el cubo tiene lado unidad, calcule la media aritmética de las longitudes de los 13 ejes. No utilice tablas y proporcione los resultados dos decimales.

PISTA

PROBLEMAS DE 1951

51.1. La longitud del perímetro de un triángulo rectángulo mide 60 cm y la altura perpendicular a la hipotenusa mide 12 cm. Encuentre cuánto miden los lados del triángulo.

PISTA

51.2. Se corta un cuadrilátero en cuatro triángulos siguiendo sus dos diagonales. Llamaremos a dos de esos triángulos «opuestos» si tienen un vértice común pero no comparten ningún lado. Pruebe las siguientes proposiciones:

A. El producto de las áreas de dos triángulos opuestos es igual al producto de las áreas de los otros dos triángulos opuestos.

B. El cuadrilátero es un trapezoide si, y solo si, hay dos triángulos opuestos con la misma área.

C. El cuadrilátero es un paralelogramo si, y solo si, los cuatro triángulos tienen la misma área.

PISTA

51.3. Considere el tronco de un cono circular recto. Llamaremos «círculo mediano» al círculo resultante de la intersección del tronco con el plano paralelo a las caras superior e inferior del tronco que se encuentra a igual distancia de ambas caras. Considere, también, un cilindro de la misma altura que el tronco y cuya base sea ese círculo mediano.

¿Cuál de los dos sólidos tiene mayor volumen, el tronco o el cilindro? ¡Demuestre su respuesta!

(Una posible demostración algebraica consiste en expresar ambos volúmenes en términos de datos adecuados y transformar su diferencia de manera que el signo resulte evidente.)

PISTA

PROBLEMAS DE 1952

52.1. Demuestre la siguiente proposición: Si uno de los lados de un triángulo es menor que el promedio (media aritmética) de los otros dos, el ángulo opuesto es menor que el promedio de los otros dos ángulos.

PISTA

52.2. Considere el tronco de una pirámide recta de base cuadrada. Denominemos «sección media» a la intersección del tronco con un plano paralelo a la base y al techo y equidistante de ambos. Denominemos «rectángulo intermedio» al rectángulo que tiene un lado igual al lado de la base y otro igual al lado del techo.

Cuatro amigos suyos coinciden en que el volumen del tronco es igual a su altura multiplicada por una cierta área, pero no se ponen de acuerdo en qué área y tiene cuatro propuestas diferentes:

I. la de la sección media;

II. el promedio de la de la base y la del techo;

III. el promedio de la de la base, la del techo y la de la sección media;

IV. el promedio de la de la base, la del techo y la del rectángulo intermedio.

Sea h la altura del tronco, a el lado de su base y b el lado del techo. Exprese cada una de las cuatro reglas propuestas en notación matemática y decida, en cada caso, si es correcta o incorrecta, dando una demostración de su respuesta.

PISTA

52.3. Pruebe que la solución de la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

en números enteros x, y, z es $x = y = z = 0$.

PISTA

PROBLEMAS DE 1953

53.1. Blas tiene 10 bolsillos y 44 monedas de euro. Quiere guardar sus monedas en los bolsillos de manera que cada uno contenga un número diferente de monedas.

A. ¿Lo puede hacer?

B. Generalice el problema al caso en que hay p bolsillos y n monedas. ¿Por qué el problema resulta especialmente interesante cuando se da la siguiente relación?:

$$n = \frac{(p + 1)(p - 2)}{2}$$

PISTA

53.2. Observe que el valor de

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n + 1)!}$$

es 1/2, 5/6, 23/24 para n = 1, 2, 3, respectivamente. Conjeture la ley general (calculando más valores si fuera necesario) y pruébela.

PISTA

53.3. Encuentre x, y, u y v que satisfagan el sistema de cuatro ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 7y + 3v + 5u &= 16 \\ 8x + 4y + 6v + 2u &= -16 \\ 2x + 6y + 4v + 8u &= 16 \\ 5x + 3y + 7v + u &= -16 \end{aligned}$$

(Este problema puede ser largo y aburrido: encuentre un atajo.)

PISTA

53.4. Los cuatro puntos G, H, V, U son (en ese orden) las cuatro esquinas de un cuadrilátero. Un topógrafo quiere hallar la longitud $UV = x$. Sabe que la longitud $GH = l$ y mide los cuatro ángulos $\angle GUV = \alpha$, $\angle HUV = \beta$, $\angle UVG = \gamma$, $\angle GVH = \delta$.

A. Exprese x en términos de α, β, γ, δ y l.

B. Encuentre alguna forma de comprobar que el resultado es correcto.

C. Si tiene una idea clara de cómo hacer el apartado A, exprésela en un enunciado breve.

PISTA

PROBLEMAS DE 1954

54.1. Considere la tabla:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 + 5 &= 8 \\ 7 + 9 + 11 &= 27 \\ 13 + 15 + 17 + 19 &= 64 \\ 21 + 23 + 25 + 27 + 29 &= 125 \end{aligned}$$

Conjeture la ley general sugerida por estos ejemplos, exprésela en notación matemática adecuada y demuéstrela.

PISTA

54.2. El lado de un hexágono regular tiene longitud n (un entero). Usando paralelas equidistantes a sus lados, el hexágono se divide en T triángulos equiláteros, cada uno de los cuales tiene lados de longitud 1. Denotemos por V el número de vértices que se forman a través de esta división, y por L el número de líneas de frontera de longitud 1. (Una línea de frontera pertenece a uno o a dos triángulos; un vértice a dos o más triángulos.)

Cuando $n = 1$ (el caso más simple), $T = 6$, $V = 7$, $L = 12$. Considere el caso general y exprese T, V y L en términos de n. (Adivinar el resultado está bien; probarlo es mejor.)

PISTA

54.3. Demuestre que es imposible encontrar números (reales o complejos) a, b, c, A, B y C tales que la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ax + by + cz)(Ax + By + Cz)$$

exprese una identidad válida para todo x, y, z.

PISTA

PROBLEMAS DE 1955

55.1. Benito quiere un terreno, perfectamente a nivel, que tiene cuatro lindes. Dos van exactamente de norte a sur, y las otras exactamente de este a oeste. Cada linde mide exactamente 100 metros. ¿Puede Benito comprar un terreno como ese en España? ¡Explique por qué o por qué no!

PISTA

55.2. (A) Encuentre tres números *p, q, r* tales que la ecuación

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = (px^2 + qx + r)^2$$

se cumpla para todo *x*.

(B) Este problema requiere calcular de forma «exacta» la raíz cuadrada de un polinomio dado de grado 4, algo que puede hacerse en este caso, pero que habitualmente no es posible. ¿Por qué no?

PISTA

55.3. Benito, Pedro y Pablo viajan juntos. Pedro y Pablo son buenos caminantes; cada uno camina *p* kilómetros por hora. Benito cojea de un pie y conduce un cochecito de dos plazas, en el que no caben tres personas; el coche recorre *c* kilómetros por hora. Los tres amigos adoptan el siguiente esquema: Parten todos juntos, Pablo con Benito en el coche y Pedro caminando. Al rato Benito deja a Pablo, que se pone a caminar, y regresa a recoger a Pedro. Benito y Pedro van en coche hasta alcanzar a Pablo. En ese punto se intercambian: Pablo va en coche y Pedro camina, tal y como hicieron al principio, y todo el proceso se repite tantas veces como sea necesario.

A. ¿Cuántos kilómetros avanza la compañía por hora?

B. ¿Durante qué porcentaje del tiempo de viaje lleva el coche una única persona?

C. Compruebe los casos extremos $p = 0$ y $p = c$.

PISTA

55.4. El vértice de una pirámide opuesto a la base se denomina *ápice*.

A. Diremos que la pirámide es «isósceles» si su ápice está a la misma distancia de todos los *vértices* de la base. Adoptando esta definición, demuestre que la base de una pirámide isósceles está *inscrita* en un círculo cuyo centro es el pie de la altura de la pirámide.

B. Ahora diremos que la pirámide es «isósceles» si su ápice está a la misma distancia (perpendicular) de todos los *lados* de la base. Adoptando esta definición (distinta de la anterior) demuestre que la base de una pirámide isósceles está *circunscrita* sobre un círculo cuyo centro es el pie de la altura de la pirámide.

PISTA

PROBLEMAS DE 1956

56.1. Dado un hexágono regular y un punto en el mismo plano, dibuje una línea recta que pase por el punto y que divida al hexágono en dos partes de igual área.

PISTA

56.2. Afirmamos que 50 céntimos se pueden pagar de 50 formas distintas usando monedas de 1, 5, 10, 25 y 50 céntimos. ¿De cuántas maneras se pueden pagar 25 céntimos? ¿Es verdad lo que afirmamos sobre los 50 céntimos? Justifique sus respuestas con tanta claridad como le sea posible.

PISTA

56.3. Construyamos un hexágono añadiendo a un triángulo Δ arbitrario dado tres triángulos isósceles exteriores, cada uno de los cuales tenga un ángulo de 120° opuesto al lado de Δ que forma su base. Pruebe que los tres vértices del hexágono que no lo son de Δ son vértices de un triángulo *equilátero*. (Basta con expresar un solo lado *s* del supuesto triángulo equilátero en términos de los lados *a*, *b* y *c* de Δ, siempre y cuando esa expresión sea simétrica in *a*, *b* y *c*.)

PISTA

56.4. Diez personas se sientan en torno a una mesa redonda. Las suma de 10 euros se distribuye entre ellas de acuerdo con la regla de que cada persona reciba la mitad de la suma conjunta de sus dos vecinos. ¿Es posible distribuir el dinero de ese modo? Demuestre su respuesta.

PISTA

PROBLEMAS DE 1957

57.1. La colección de sellos de Benito tiene tres álbumes. Dos décimas partes de sus sellos están en el primero, varias séptimas partes en el segundo y el tercero contiene 303 sellos. ¿Cuántos sellos tiene Benito? (¿Hay condiciones suficientes para determinar su número?)

PISTA

57.2. Denominamos al vértice de un tetraedro *trirrectangular* si los tres lados que parten de él son perpendiculares entre sí. Dadas las áreas *A*, *B* y *C* de las tres caras adyacentes del vértice trirrectangular de un tetraedro, encuentre el área *D* de la cuarta cara, opuesta a ese vértice. (¿Qué problema de geometría plana diría usted que es análogo?)

PISTA

57.3. Divida un triángulo dado mediante tres cortes rectilíneos en siete partes, cuatro de las cuales sean triángulos (y las tres restantes pentágonos). Uno de los trozos triangulares debe estar bordeado por los tres cortes, y cada uno de los restantes trozos triangulares por dos cortes y uno de los lados del triángulo inicial.

A. Elija los tres cortes de tal manera que los cuatro trozos triangulares sean congruentes. Describa su elección de forma precisa y dibuje claramente la figura.

B. ¿Qué fracción del área del triángulo inicial es el área de uno de los trozos triangulares que ha elegido?

(Puede resultar útil examinar antes una forma particular del triángulo inicial para la que la solución sea especialmente fácil.)

PISTA

PROBLEMAS DE 1958

58.1. ¿Cuántos años tiene el capitán, cuántos hijos tiene y cuánto mide su barco? Sabemos que el producto de los tres números (enteros) buscados es 32118. La longitud del barco está dada en metros (varios metros), el capitán tiene tanto hijos como hijas, tiene más años que hijos, pero aún no ha llegado a cumplir cien años. (Razone su respuesta.)

PISTA

58.2. Encuentre x, y, u, v que satisfagan el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + u &= 4 \\ y + u + v &= -5 \\ u + v + x &= 0 \\ v + x + y &= -8 \end{aligned}$$

(Este ejercicio puede parecer largo y aburrido: busque un atajo.)

PISTA

58.3. «En cualquier triángulo, la suma de sus tres … es mayor que el semiperímetro.” Sustituya los puntos … sucesivamente por

I. alturas,

II. medianas,

III. bisectores (de los ángulos),

y obtendrá tres proposiciones diferentes. Examine cada una de ellas y diga si es verdadera o falsa. ¡Demuestre su respuesta!

PISTA

58.4. Observe que el valor de

$$1!1 + 2!2 + 3!3 + \ldots + n!n$$

es 1, 5, 23, 119 para $n = 1, 2, 3, 4$, respectivamente. Conjeture la ley general (obteniendo más valores si es necesario) y demuéstrela.

PISTA

PROBLEMAS DE 1959

59.1. Alfredo y Blas viven en extremos opuestos de la misma calle. Alfredo tiene que llevar un paquete a casa de Blas y Blas otro a casa de Alfredo. Salen a la vez, cada uno caminando a velocidad constante, y regresan a sus casas en cuanto dejan el paquete en su destino. Se encuentran por primera vez a distancia *a* metros de la casa de Alfredo y por segunda vez a distancia *b* metros de la casa de Blas.

A. ¿Cuál es la longitud de la calle?

B. Si $a = 300$ y $b = 400$, ¿quién camina más deprisa?

PISTA

59.2. Se colocan unas monedas (círculos idénticos) formando un patrón regular a lo largo de una mesa muy, muy larga (un plano infinito). Consideraremos dos posibles patrones.

En el primero, cada moneda toca a otras cuatro, y las líneas rectas que unen los centros de las monedas en contacto dividen el plano en cuadrados iguales.

En el segundo, cada moneda toca a otras seis, y las líneas rectas que unen los centros de las monedas en contacto dividen el plano en triángulos equiláteros iguales.

Calcule el porcentaje del plano que cubren las monedas en cada uno de los dos patrones.

PISTA

59.3. Demuestre que si n es un entero mayor que 1, $n^{n-1} - 1$ es divisible por $(n-1)^2$.

PISTA

59.4. Construya un cuadrado (exterior) sobre cada lado de un triángulo (arbitrario) dado. Los 6 vértices de esos 3 cuadrados que no coinciden con un vértice del triángulo forman un hexágono. Tres lados de ese hexágono son, por supuesto, iguales a los lados correspondientes del triángulo. Demuestre que cada uno de los tres lados restantes es igual al doble de una mediana del triángulo.

PISTA

PROBLEMAS DE 1960

60.1. Una marca de bolígrafos se vende, sin mucho éxito, a 50 céntimos en la papelería que hay frente al instituto. Sin embargo, tras reducir su precio, el lote completo restante se vende por 31.93 €. ¿Cuál es el precio reducido de los bolígrafos? (¿Hay condiciones suficientes para resolver el problema?)

PISTA

60.2. El punto *P* está situado en el interior de un rectángulo de tal manera que la distancia a *P* desde una esquina del rectángulo es de 5 metros, desde la esquina opuesta 14 metros y desde una tercera esquina 10 metros. ¿Cuál es la distancia a *P* desde la cuarta esquina?

PISTA

60.3. Demuestre la identidad

$$\cos\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\alpha}{4}\,\cos\frac{\alpha}{8} = \frac{\sin\alpha}{8\sin(\alpha/8)}$$

y generalícela.

PISTA

60.4. De doce triángulos equiláteros congruentes ocho son las caras de un octaedro regular y cuatro las caras de un tetraedro regular. Encuentre el cociente del volumen del octaedro al volumen del tetraedro.

PISTA

PROBLEMAS DE 1961

61.1. Resuelva el siguiente sistema de tres ecuaciones para las incógnitas x, y, z:

$$\begin{aligned} 5732x + 2134y + 2134z &= 7866, \\ 2134x + 5732y + 2134z &= 670, \\ 2134x + 2134y + 5732z &= 11464. \end{aligned}$$

PISTA

61.2. Era un día de mucho calor y las 4 parejas se bebieron en total 44 botellas de coca-cola. Ana se bebió 2 botellas, Beatriz 3, Carolina 4 y Diana 5. El Sr. Castaño se bebió tantas botellas como su esposa, pero cada uno de los otros hombres se bebieron más que sus respectivas esposas: el Sr. Verde el doble, el Sr. Blanco el triple y el Sr. García cuatro veces más. Diga los nombres de las cuatro esposas. (Demuestre su afirmación.)

PISTA

61.3. Resuelva el siguiente sistema de tres ecuaciones para las incógnitas x, y, z (a, b, c son constantes dadas):

$$\begin{aligned} x^2y^2 + x^2z^2 &= axyz, \\ y^2z^2 + y^2x^2 &= bxyz, \\ z^2x^2 + z^2y^2 &= cxyz. \end{aligned}$$

PISTA

61.4. Una pirámide se denomina «regular» si su base es un polígono regular y su altura cae en el centro de su base. Una pirámide regular tiene una base hexagonal cuya área es un cuarto de la superficie total S de la pirámide. Su altura es h. Exprese S en términos de h.

PISTA

PROBLEMAS DE 1962

62.1. Resuelva el sistema

$$2x^2 - 4xy + 3y^2 = 36$$
$$3x^2 - 4xy + 2y^2 = 36$$

(Una solución es fácil de adivinar, pero se le pide que encuentre *todas* las soluciones. No se necesita saber geometría analítica para resolver este problema, pero puede ayudar a entender el resultado. ¿Cómo?)

PISTA

62.2. Cada uno de los cuatro números a, b, c y d es positivo y menor que uno. Demuestre que los cuatro productos

$$4a(1 - b),\ 4b(1 - c),\ 4c(1 - d),\ 4d(1 - a)$$

son todos mayores que uno.

PISTA

62.3. Sobre cada lado de un triángulo rectángulo se construye un cuadrado exterior (tal y como se hace para ilustrar el teorema de Pitágoras). Una el vértice del ángulo recto con el centro del cuadrado de la hipotenusa, y una los centros de los cuadrados de los otros dos lados. Demuestre que los dos segmentos así construidos son

A. perpendiculares entre sí, y

B. de la misma longitud.

PISTA

62.4. Cinco lados de un tetraedro tienen la misma longitud a, y el sexto lado tiene longitud b.

A. Exprese el radio de la esfera circunscrita sobre el tetraedro en términos de a y b.

B. ¿Cómo utilizaría el resultado A para determinar de manera práctica el radio de una superficie esférica (de una lente)?

PISTA

PROBLEMAS DE 1963

63.1. En un triángulo rectángulo, c es la longitud de la hipotenusa, a y b son las longitudes de los catetos and d es la longitud del diámetro del círculo inscrito. Pruebe que

$$a + b = c + d$$

PISTA

63.2. Demuestre que la expresión

$$n^2(n^2 - 1)(n^2 - 4)$$

es divisible por 360 para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

PISTA

63.3. Resuelva el sistema de tres ecuaciones para las incógnitas x, y, z, hallando todas las soluciones:

$$\begin{aligned} x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 8(yz + zx + xy) &= 36 \\ 6x^2 + y^2 + 5z^2 + 8(yz + zx + xy) &= 36 \\ 5x^2 + 6y^2 + z^2 + 8(yz + zx + xy) &= 36 \end{aligned}$$

(Una solución es fácil de encontrar.)

PISTA

63.4. La base de un prisma recto es un hexágono regular y la altura del prisma es igual al diámetro del círculo inscrito en la base. El volumen del prisma es igual al volumen de un octaedro regular.

Halle el cociente de las áreas de las superficies de estos dos sólidos.

Observe que los dos sólidos tienen el mismo número de caras y que uno de ellos es un sólido regular, pero el otro no. ¿Algo que comentar?

PISTA

PROBLEMAS DE 1964

64.1. Una tarta tiene la forma de un prisma recto de base cuadrada; está cubierta de crema por arriba y por las cuatro caras laterales. La altura del prisma es 5/16 del lado de la base. Corte la tarta en 9 trozos de tal modo que cada uno de ellos tenga la misma cantidad de tarta y de crema. Uno de los 9 trozos debería ser un prisma recto de base cuadrada y con crema solo por arriba: calcule el cociente entre su altura y el lado de su base y proporcione una descripción clara, con un esquema aceptable, de los 9 trozos.

PISTA

64.2. Demuestre que todos los números de la sucesión

49, 4489, 444889, 44448889, …

son cuadrados perfectos.

PISTA

64.3. Si el área de un triángulo es un número racional hay cuatro casos posibles: el triángulo puede tener tres, dos, uno o ningún lados racionales. Ilustre con un ejemplo (a ser posible simple) cada uno de los cuatro casos.

PISTA

64.4. A un examen de tres materias: Álgebra, Biología y Cálculo, se presentaron 41 estudiantes. La siguiente tabla indica cuántos estudiantes suspendieron cada materia y sus diferentes combinaciones:

materias	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
suspensos	12	5	8	2	6	3	1

(Por ejemplo, 5 estudiantes suspendieron la Biología, de entre los cuales 3 suspendieron además el Cálculo, y solo uno de esos tres suspendió también el Álgebra.)

¿Cuántos estudiantes aprobaron las tres materias?

(¿Se le ocurre algún diagrama apropiado que clarifique la idea detrás de este problema?)

PISTA

64.5. Sean *a, b* y *c* las longitudes de los lados de un triángulo, y sea *d* la longitud del segmento bisector del ángulo opuesto al lado de longitud *c* que termina en ese lado.

A. Exprese *d* en términos de *a, b* y *c*.

B. Compruebe la expresión obtenida de tantas formas como pueda (con casos particulares, casos límite, etc.).

PISTA

PROBLEMAS DE 1965

65.1. —¿Cuántos hijos tiene y de qué edades? —pregunta el invitado, un profesor de matemáticas.

—Tengo tres chicos —dice el señor García—. El producto de sus edades es 72 y la suma es el número del domicilio.

El invitado salió a la calle, volvió a entrar y dijo:

—El problema no se puede resolver.

—Es verdad —contestó el señor García—, pero aún confío en que el mayor gane algún día el concurso de matemáticas de Stanford.

¿Qué edades tienen los hijos y por qué?

PISTA

65.2. De un triángulo rectángulo se conocen la longitud de la hipotenusa c y el área A. Sobre cada lado del triángulo formemos un cuadrado exterior y consideremos la menor figura convexa que contenga a los tres cuadrados (la que formaría una goma tensa colocada alrededor de ellos): se trata de un hexágono (que es irregular, comparte un lado con cada cuadrado y uno de cuyos lados tiene, por supuesto, longitud c).

Halle el área del hexágono.

PISTA

65.3. Sean x, y, 1 las longitudes de los lados de un triángulo y supongamos que $x \leq y \leq 1$. El punto (x, y), de coordinadas rectangulares x e y, *representa* el triángulo sobre el plano. Describa de forma precisa y dibuje con claridad el conjunto de puntos del plano que, de la forma que acabamos de explicar, representa

A. triángulos,
B. triángulos isósceles,
C. triángulos rectángulos,
D. triángulos agudos,
E. triángulos obtusos.

Localice los puntos representativos de alguna otra forma triangular digna de mención.

PISTA

65.4. Halle el resto de dividir el polinomio

$$x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$$

por el polinomio $x^3 - x$.

PISTA

Tercera Parte

PISTAS

PISTAS DE 1946

46.1. *¿Podría reformular el problema?* Imagine que es usted uno de los participantes. ¿De cuántas formas pueden emparejarlo con otro jugador? ¿Puede ver cómo el problema se puede dividir en dos partes: (A) elegir a su oponente, y (B) emparejar al resto de los jugadores?

46.2. *Fíjese en la incógnita.* La incógnita es el volumen de un tetraedro, que se puede calcular cuando la base y la altura son conocidas. Pero ninguna de estas dos magnitudes se conoce en este problema. *¿Puede pensar en un problema relacionado más accesible?* (Puede concebir un tetraedro más accesible que sea una proporción del original?)

46.3. Demostrar cualquiera de las proposiciones se reduce a demostrar que o bien ciertos segmentos o bien ciertos ángulos son iguales. ¿Conoce algún teorema o teoremas útiles para demostrar algo así? *Dibuje una figura.* ¿Podría introducir algún elemento auxiliar que facilite el uso de alguno de los mencionados teoremas?

PISTAS DE 1947

47.1. *He aquí un problema relacionado:* Si el libro tuviera exactamente 9 páginas numeradas, ¿cuántos dígitos tendría que usar el impresor? (Respuesta: 9.)Y este es otro *problema relacionado:* Si el libro tuviera exactamente 99 páginas numeradas, ¿cuántos dígitos tendría que usar el impresor?

47.2. *¿Podría reformular el problema?* ¿Cuáles serían los dígitos borrados si el precio total, expresado en céntimos, es divisible por 72?

47.3. *¿Cuál es la condición?* Las cuatro raíces deben formar una progresión aritmética. Sin embargo, la ecuación presenta una peculiaridad: solo contiene potencias pares de la variable x. Por lo tanto, si a es una raíz, también debe serlo $-a$.

47.4. *¿Conoce algún teorema relacionado?* Dese cuenta de la similitud entre las tres identidades, especialmente entre los términos de la izquierda. Si ya ha probado alguna de las identidades, ¿podría usarla para obtener las otras dos?

PISTAS DE 1948

48.1. Los descubrimientos por inducción requieren observación. Observe los términos de la derecha de las igualdades, y observe también los términos iniciales y finales de la izquierda. ¿Cuál es la ley general?

48.2. *Separe las distintas condiciones y escríbalas*. Sean

$$a - d,\ a,\ a + d$$

los términos de la progresión aritmética, y

$$bg^{-1},\ b,\ bg$$

los términos de la progresión geométrica.

48.3. *Separe las distintas condiciones y escríbalas*. Sean a y b las longitudes de las (desconocidas) líneas de visión, y α y β sus inclinaciones con respecto al plano horizontal, respectivamente. Hay tres partes en la condición, a saber:

1. la inclinación de a
2. la inclinación de b
3. el triángulo de lados a, b y c.

48.4. *Fíjese en la incógnita*. Hay dos incógnitas: la razón $r_1 : r_2$ y la razón $r_2 : r_3$.

PISTAS DE 1949

49.1. *¿Podría reformular el problema?* Como un «problema de hallar» se leería: «Halle un cuadrado perfecto *s* de la forma $1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^k$, donde *k* es un entero positivo.» *Separe las distintas condiciones y escríbalas* Podemos distinguir dos partes en la condición:

1. que *s* sea un cuadrado, y
2. que *s* tenga la forma buscada.

49.2. Los descubrimientos por inducción requieren observación. ¿Puede encontrar alguna forma sistemática de contar los triángulos para un valor dado de *n*?

49.3. *¿Conoce algún teorema relacionado?* La altura es *h*. ¿Conoce algún teorema más simple que involucre la altura de un triángulo?

PISTAS DE 1950

50.1. Los descubrimientos por inducción requieren observación. Examine la transición un caso al siguiente.

50.2. *¿Conoce algún teorema relacionado?* El lugar de los puntos desde los los cuales un segmento dado se ve con un ángulo locus está formado por dos arcos circulares que terminan en los extremos del segmento y que son simétricos con respecto al segmento.

50.3. Determinados ejes son fáciles de encontrar por simple inspección, pero ¿son esos *todos* los ejes? ¿*Puede probar* que su lista de ejes es exhaustiva? Se puede clasificar su lista de alguna forma clara?

PISTAS DE 1951

51.1. *Separe las distintas condiciones y escríbalas*. Podemos distinguir tres partes en la condición, a saber:

1. el perímetro,
2. el triángulo rectángulo, y
3. la altura con respecto a la hipotenusa.

51.2. *Dibuje una figura. Introduzca una notación adecuada.* ¿Cómo podría demostrar que las áreas (o productos de áreas) son iguales?

51.3. *Dibuje una figura. Introduzca una notación adecuada.*

PISTAS DE 1952

52.1. ¿Cuál es la hipótesis? ¿Cuál es la conclusión? Sean a, b y c los lados, y A, B y C los ángulos opuestos, respectivamente. Entonces la hipótesis se traduce en que

$$a < \frac{b + c}{2}$$

y la conclusión en que

$$A < \frac{B + C}{2}$$

Fíjese en la conclusión. ¿Podría reformularla?

52.2. *¿Conoce algún teorema relacionado? ¿Y algún problema más especial?* ¿Qué pasa si cambia los datos del problema?

52.3. *¿Cuál es la condición?* La suma de los cuadrados de tres enteros de ser el doble de su producto. La suma debe ser un número par.

PISTAS DE 1953

53.1. Si Blas tuviera muchas monedas no tendría ninguna dificultad para llenar cada uno de sus bolsillos de una forma distinta. *¿Podría reformular el problema?* ¿Cuál es el mínimo número de monedas que se pueden guardar en 10 bolsillos de tal modo que ninguno contenga el mismo número de monedas que otro?

53.2. ¿*Reconoce* los denominadores 2, 6, 24? *¿Conoce algún teorema relacionado? ¿Y algún problema análogo?*

53.3. Para resolver un sistema como este tenemos que combinar las ecuaciones de algún modo. Fíjese en ciertas relaciones entre las ecuaciones que le sugieran alguna forma de combinarlas que sea especialmente ventajosa.

53.4. Newton hizo notar en cierta ocasión que, en algunos problemas geométricos, se obtiene el mismo sistema de ecuaciones independientemente de qué cantidades se consideren datos y cuáles incógnitas. En consecuencia, habría que elegir los datos y las incógnitas de una manera que facilite escribir las ecuaciones.

PISTAS DE 1954

54.1. Los descubrimientos por inducción requieren observación. Observe los lados derechos de las ecuaciones, así como los términos inicial y final de los lados izquierdos. ¿Cuál es la ley general?

54.2. *Dibuje una figura*. Le puede ayudar a descubrir la ley de manera inductiva o puede sugerirle relaciones entre *T, V, L* y *n*.

54.3. *¿Se puede cumplir la condición? ¿Es suficiente la condición para determinar la incógnita?* ¿Podría dividir la condición en partes de alguna manera conveniente?

PISTAS DE 1955

55.1. *¿Cuál es la pregunta?* ¿Qué significa realmente? Es, de hecho, una cuestión de interpretación: debe interpretar los términos «a nivel», «este», «oeste», «norte» y «sur» sobre un mundo *idealizado* perfectamente esférico.

55.2. *¿Se puede cumplir la condición? ¿Es suficiente la condición para determinar la incógnita?* ¿Cómo dividiría la condición en partes de forma apropiada?

55.3. *Separe las distintas condiciones y escríbalas* Desde el principio y hasta el punto en que los tres amigos se encuentran de nuevo se suceden tres etapas distintas:

1. Benito lleva a Pablo en el coche,
2. Benito va solo en el coche,
3. Benito lleva a Pedro en el coche.

Llamemos t_1, t_2 y t_3 a las duraciones respectivas de estas tres fases. ¿Cómo podría dividir la condición en partes de manera apropiada?

55.4. *¿Conoce algún teorema relacionado?* La altura cae sobre el punto medio de la base en un triángulo isósceles. Este es un *teorema relacionado que ya ha sido demostrado. ¿Podría usar este método?* El teorema del triángulo isósceles se demuestra a partir de dos triángulos rectángulos que comparten las alturas.

PISTAS DE 1956

56.1. *¿Puede concebir algún problema más accesible? ¿Y un problema más general?*

56.2. *¿Puede concebir algún problema más accesible? ¿Y un problema más general? ¿Y algún problema análogo?* He aquí un problema análogo *muy* simple: ¿De cuántas formas puede pagar un céntimo? He aquí uno más general: ¿De cuántas formas se pueden pagar *n* céntimos usando monedas de 1, 5, 10, 25 y 50 céntimos? Este problema se puede resolver a ojo para algunos casos particulares sencillos, como ilustra la tablita de debajo (en la que E_n denota el número de formas diferentes de pagar *n* céntimos usando los cinco tipos de monedas).

n	4	5	9	10	14	15	19	20	24
E_n	1	2	2	4	4	6	6	9	9

Preguntamos, en concreto, por E_{25} y E_{50}, pero nuestra pregunta es general (calcular E_n para un *n* cualquiera). He aquí otro problema análogo *muy* sencillo: Halle A_n, el número de formas de pagar *n* céntimos usando solo céntimos ($A_n = 1$).

56.3. *Dibuje una figura. Introduzca una notación adecuada.* ¿Cómo puede obtener una expresión para *s?* ¿Usando geometría euclídea? ¿Usando geometría analítica? ¿Usando trigonometría? ¿Qué método parece más prometedor?

56.4. *Introduzca una notación adecuada. ¿Cuál es la condición?* ¿Cómo se relaciona la cantidad que recibe cada persona con las de sus vecinos? ¿Y con la del vecino de su izquierda? ¿Quién recibe más dinero?

PISTAS DE 1957

57.1. *¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?*

57.2. *¿Cuál es la incógnita?* El área, D, de un triángulo. ¿Cómo puede obtenerla? El área de un triángulo se puede obtener usando la fórmula de Herón si sus tres lados son conocidos. Sean a, b y c las longitudes de esos tres lados, y sea $s = (a + b + c)/2$; entonces

$$D^2 = s(s - a)(s - b)(s - c).$$

Los lados a, b y c son también las hipotenusas de los triángulos rectángulos cuyas áreas son A, B y C, respectivamente. Supongamos que los catetos de dichos triángulos tienen longitudes p, q y r, de modo que

$$a^2 = q^2 + r^2, \quad b^2 = r^2 + p^2, \quad c^2 = p^2 + q^2.$$

Pero las áreas A, B y C están dadas por

$$A = \frac{q\,r}{2}\ , \quad B = \frac{r\,p}{2}\ , \quad C = \frac{p\,q}{2}\ .$$

Tenemos siete incógnitas (D, a, b, c, p, q, r) y un sistema de siete ecuaciones para determinarlas. Sin embargo, hay una pega: resolver el sistema parece muy complicado, y la fórmula de Herón no parece muy prometedora. Intentémoslo de nuevo.

¿Cuál es la incógnita? El área, D, de un triángulo. ¿Cómo puede obtenerla? La forma más común de calcular el área de un triángulo es

$$A = \frac{a\,h}{2}\ ,$$

donde a es la base y h la altura del triángulo de área D. Démosle a a el mismo significado que antes e introduzcamos h en la figura.

57.3. *¿Puede concebir algún problema más accesible? ¿Y algún problema más especial?*

PISTAS DE 1958

58.1. *¿Cuál es la incógnita?* Denotemos x, y, z el número de hijos, la edad del capitán y la longitud del barco, respectivamente.

Podemos plantear el problema así: la incógnita es una terna de números (x, y, z).

Separe las distintas condiciones y escríbalas:

A. x, y, z son enteros positivos distintos de 1 y tales que $xyz = 32118$.

B. $4 \leq x < y < 100$.

¿Qué condición, A o B, es más manejable?

58.2. Para resolver un sistema como este hay que combinar las ecuaciones de algún modo. Observe que cualquier permutación de x, y, u, v deja el lado izquierdo del sistema invariante. Esta *simetría* sugiere que habría que tratar las cuatro ecuaciones de manera simétrica.

58.3. *¿Puede concebir algún problema más accesible? ¿Y un problema más general?* ¿Qué tienen en común las tres afirmaciones? ¿Podría encontrar una generalización?

Cada afirmación se refiere a una desigualdad. ¿Conoce algún teorema que pudiera ser útil?

58.4. Los descubrimientos por inducción requieren observación. ¿Puede encontrar algún patrón en los casos particulares?

PISTAS DE 1959

59.1. *¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?* ¿Puede escribir una ecuación que exprese una parte de la condición? Recuerde que una ecuación expresa la misma cantidad de dos formas distintas.

59.2. *Dibuje una figura.* ¿Cuál es la relación entre el porcentaje del plano cubierto por las monedas y el porcentaje de cada uno de los cuadrados o triángulos equiláteros iguales cubierto por las monedas?

59.3. ¿Cuál es la hipótesis? ¿Cuál es la conclusión? La hipótesis es que n es un entero mayor que 1. La conclusión es que $n^{n-1} - 1 = (n-1)^2 P(n)$, donde $P(n)$ denota un entero que depende de n.

59.4. *Dibuje una figura. Introduzca una notación adecuada.* ¿Cómo puede demostrar que los segmentos guardan la proporción 1:2?

PISTAS DE 1960

60.1. *¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?*

60.2. *¿Puede concebir algún problema más accesible? ¿Y un problema más general?* He aquí un problema más general: El punto *P* se encuentra en el interior de un rectángulo, siendo sus distancias a las cuatro esquinas *a*, *b*, *c* y *d*, recorridas cíclicamente (en sentido horario). Exprese *d* en términos de *a*, *b* y *c*.

60.3. *¿Conoce algún teorema relacionado?* Intente pensar en alguna identidad análoga más simple.

60.4. *¿Cuál es la incógnita?* La incógnita es la razón del volumen de un octaedro regular al volumen de un tetraedro regular. ¿Que tienen en común el octaedro y el tetraedro? Sus caras son triángulos equiláteros congruentes; sus aristas son iguales. *¿Podría reformular el problema?* Calcule el volumen de un octaedro regular y el de un tetraedro regular dada la longitud de una arista.

Dibuje una figura. Introduzca una notación adecuada. La solución de un problema de geometría sólida depende con frecuencia de una «figura plana clave» que abre la puerta a relaciones esenciales.

PISTAS DE 1961

61.1. Para resolver un sistema como este tenemos que combinar las ecuaciones de algún modo. Los tres lados izquierdos del sistema son *simétricos* respecto de las variables *x, y, z*; esto es, permutar las variables *x, y, z* deja invariante ese lado de las ecuaciones. Esto sugiere que deberíamos tratar las tres ecuaciones de forma simétrica.

61.2. Obviamente, el número de posibilidades está restringido de entrada (4! = 24). Sin embargo, si es inteligente, no necesitará examinar todos esos casos. *Separe las distintas partes de la condición. ¿Podría escribirlas?* Denote con *c, v, b* y *g* los números de botellas consumidas por las esposas de los señores Castaño, Verde, Blanco y García, respectivamente.

61.3. Para resolver un sistema como este tenemos que combinar las ecuaciones de algún modo. La simetría de los tres miembros izquierdos de las ecuaciones del sistema sugiere que tratemos las tres ecuaciones de forma simétrica. Un primer paso natural es eliminar el producto *xyz* del lado derecho dividiendo las ecuaciones, pero esto obliga a examinar los casos en que *xyz* se anula.

61.4. *Dibuje una figura. Introduzca una notación adecuada.* La solución de un problema de geometría sólida depende con frecuencia de una «figura plana clave».

PISTAS DE 1962

62.1. Observe que el sistema es *simétrico* con respecto a las incógnitas *x* e *y*. Esta simetría debería reflejarse de algún modo en la solución.

62.2. Observe que el conjunto de los cuatro productos es *simétrico* con respecto a las variables *a, b, c* y *d*. Esta simetría debería reflejarse de algún modo en la solución.

62.3. *Dibuje una figura. Introduzca una notación adecuada.* Denote los vértices del triángulo *A, B* y *C*, siendo *C* el vértice del ángulo recto. Sean *A', B'* y *C'* los centros de los cuadrados descritos, con lados *BC, CA* y *AB*, respectivamente. En la figura, *C* parece encontrarse en el segmento *A'B'*. ¿Ve alguna ventaja en tratar de demostrar esta conjetura?

62.4. *Dibuje una figura. Introduzca una notación adecuada.* La solución de un problema de geometría sólida depende con frecuencia de una «figura plana clave».

PISTAS DE 1963

63.1. *Vuelva a las definiciones.* ¿Qué es un círculo inscrito en un triángulo? *¿Conoce algún teorema que pudiera resultar útil?*

63.2. *¿Cuál es la conclusión?* La expresión debe ser divisible por 360. Sin embargo, esta tiene una característica inusual: sus tres factores pueden, a su vez, factorizarse, dando lugar a un producto de seis factores.

63.3. Observe que el sistema es *simétrico* con respecto a las tres incógnitas x, y, z. Esta simetría debería reflejarse de algún modo en la solución.

63.4. Como ambos sólidos tiene el mismo número de caras e igual volumen, intente adivinar cuál tendrá la superficie con menor área. Que su intuición sea o no correcta es menos importante que la forma que emplee para comprobarla.

PISTAS DE 1964

64.1. *¿Cuál es la incógnita?* La razón de la altura de un prisma recto a un lado del cuadrado de su base. ¿Cómo puede obtenerla? Si calcula expresiones para las dos cantidades, luego puede obtener la razón. ¿Cuánto valen esas cantidades? ¿Cómo puede obtener expresiones para ellas?

64.2. Considere el caso general: ¿cuál es el *n*-ésimo término de la sucesión? ¿Puede adivinar cual sería su raíz cuadrada positiva? ¿Cómo puede comprobar su conjetura?

64.3. Como tiene libertad para elegir cada ejemplo, puede seleccionar triángulos cuya área sea sencilla de calcular.

64.4. ¿Cuáles son las posibilidades de aprobar o suspender las tres materias? ¿Puede imaginar un método sistemático para contar cuántos estudiantes se encuentran en cada categoría?

64.5. *Dibuje una figura. Introduzca una notación adecuada.* El bisector *d* divide el lado *c* en dos segmentos cuyas longitudes denotaremos *p* y *q*, respectivamente; el primero comparte un extremo con *a*, el segundo con *b*. Entonces tenemos:

tres datos: *a*, *b* y *c*
tres incógnitas: *p*, *q* y *d*
tres triángulos: el original y los dos en que este queda dividido por *d*.

PISTAS DE 1965

65.1. *Separe las distintas condiciones y escríbalas* Podemos distinguir cuatro partes en la condición, a saber:

1. el producto de las edades de los chicos,
2. la suma de sus edades,
3. el hecho de que el problema no es resoluble,
4. el hecho (cuya relevancia puede pasar desapercibida) de que uno de los chicos es *el mayor*.

65.2. *¿Cuál es la incógnita?* El área del hexágono. ¿Cómo la obtenemos? *¿Es suficiente la condición para determinar la incógnita?*

65.3. *¿Cuál es la incógnita?* Hay cinco: Un conjunto de puntos (A) y cuatro subconjuntos. ¿Cómo podría caracterizar dicho conjunto? ¡Especificando las coordenadas x, y de sus puntos mediante relaciones entre dichas coordenadas!

65.4. *¿Cuál es la incógnita?* El resto de dividir un polinomio por otro. *¿Podría reformular el problema?* Denote el cociente por $q(x)$ y el resto por $r(x)$. Hemos de encontrar un polinomio $r(x)$ de grado no superior a 2 y tal que

$$x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81} = q(x)\,(x^3 - x) + r(x).$$

Cuarta Parte

SOLUCIONES

Nota: Las referencias entre paréntesis al principio de una solución dirigen a libros y artículos en los que ha aparecido anteriormente el problema correspondiente (en muchos casos con la solución que se proporciona aquí u otra muy parecida). El artículo del *American Mathematical Monthly* que contiene el conjunto completo de problemas [24] no se incluye entre estas referencias. Los números de página refieren al propio enunciado del problema en una referencia dada. «Cf.» indica problemas diferentes pero relacionados, o casos en los que un problema o solución varía algo en su enunciado o contenido del que se proporciona en este libro. Al lector interesado le resultará útil recordar que solo las referencias [9-21] contienen soluciones, pistas o comentarios. Todas las referencias aparecen listadas al final del libro.

SOLUCIONES DE 1946

46.1. [2; 18, p. 118] Denotemos con P_n el número de emparejamientos requeridos de $2n$ jugadores. Si es usted un participante, puede ser emparejado con cualquiera de los $2n - 1$ jugadores restantes. Una vez elegido su oponente, quedan $2n - 2 = 2(n - 1)$ jugadores, que se pueden emparejar de P_{n-1} formas. En consecuencia $P_n = (2n - 1)\, P_{n-1}$.

46.2. [2; 17, p. 235; Cf. 20, pp. 109–110, ejer. 4.17] El plano que contiene una de las aristas de longitud a y la perpendicular de longitud b divide el tetraedro en dos tetraedros congruentes *más accesibles,* ambos con base $ab/2$ y altura $a/2$. Por lo tanto, el volumen pedido es

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ab}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2 b}{6}.$$

46.3. [2; Cf. 19, pp. 161–162, ejer. 4]

A. Las proposiciones I y IV son, en general, ciertas, pero las proposiciones II y III son falsas.

B. Las proposiciones II y III son falsas: el rectángulo y el rombo son contraejemplos, respectivamente. Las proposiciones II y III son ciertas para pentágonos, y se siguen de las proposiciones II’ y III’ respectivamente:

> II’. Si un polígono inscrito en un círculo es equiángulo, cualesquiera dos aristas separadas por una sola arista intermedia son iguales.
>
> III’. Si un polígono circunscrito alrededor de un círculo es equilátero, cualesquiera dos ángulos separados por solo un ángulo intermedio son iguales.

Para demostrar las proposiciones I, II’, II’ y IV, una el centro del círculo con los vértices del polígono, trace perpendiculares desde el centro a las aristas y seleccione triángulos congruentes.

SOLUCIONES DE 1947

47.1. [3; Cf. 17, p. 234, prob. 4] Un volumen de 999 páginas necesita

$$9 + 2 \times 90 + 3 \times 900 = 2889$$

dígitos. Si el grueso volumen en cuestión tiene x páginas,

$$189 + 3(x - 99) = 1890$$

de donde $x = 666$.

47.2 [3; 17, p. 234] Si —679— es divisible por 72, lo es por 8 y por 9. Si es divisible por 8, el número 79— debe ser divisible por 8 (ya que 1000 es divisible por 8), así que 79— debe ser 792: el último dígito borrado es 2. Si —6792 es divisible por 9, la suma des sus dígitos debe ser también divisible por 9 (la famosa «prueba del nueve»), así que el primer dígito borrado debe ser 3. El precio de un pavo era (en la época de nuestros abuelos) 367.92 € ÷ 72 = 5.11 €.

47.3. [3; 17, p. 236] Si a y $-a$ son las raíces con menor valor absoluto, la progresión tendrá la forma

$$-3a, -a, a, 3a.$$

Por lo tanto

$$(x^2 - a^2)(x^2 - 9a^2) = x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2.$$

Comparando los coeficientes de las potencias iguales obtenemos el sistema

$$10a^2 = 3m + 2,$$

$$9a^4 = m^2.$$

Eliminando a obtenemos

$$19m^2 - 108m - 36 = 0.$$

Así pues $m = 6$ o $-6/19$.

47.4. [3; 19, p. 162] Llamemos a las tres identidades (a), (b) y (c), respectivamente. Si

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

entonces

$$(\pi - 2\alpha) + (\pi - 2\beta) + (\pi - 2\gamma) = \pi.$$

Podemos pasar de (a) a (b) y de (b) a (c) sustituyendo $\pi - 2\alpha$, $\pi - 2\beta$ y $\pi - 2\gamma$ en lugar de α, β y γ, respectivamente. Solo queda verificar (a), lo que puede hacer de muchas formas. Por ejemplo, sustituya $2u$, $2v$ y $\pi - 2u - 2v$ en lugar de α, β y γ, respectivamente. Entonces (a) se transforma en

$$\sin u \cos u + \sin v \cos v = [2 \cos u \cos v - \cos(u + v)] \sin(u + v).$$

Utilice los teoremas de adición del coseno y del seno

SOLUCIONES DE 1948

48.1. [4; 18, p. 8] La ley general es:

$$(n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \ldots + (n + 1)^2 = n^3 + (n + 1)^3.$$

Los términos del miembro de la izquierda forman un progresión aritmética.

48.2. [4; 17, p. 236] La condición se puede descomponer fácilmente en cuatro partes, expresadas por las cuatro ecuaciones

$$\begin{aligned} a - d + bg^{-1} &= 85, \\ a + b &= 76, \\ a + d + bg &= 84, \\ 3a &= 126. \end{aligned}$$

La última ecuación da como resultado $a = 42$, así que de la segunda se obtiene $b = 34$. Sumando las dos ecuaciones restantes se obtiene

$$2a + b(g^{-1} + g) = 169.$$

Dado que a y b son ya conocidas, tenemos una ecuación cuadrática para g. Sus soluciones son

$$g = 2,\ d = -26, \quad \text{o} \quad g = \frac{1}{2},\ d = 25.$$

Las progresiones son

$$68,\ 42,\ 16 \quad \text{y} \quad 17,\ 34,\ 68,$$

o bien

$$17,\ 42,\ 67 \quad \text{y} \quad 68,\ 34,\ 17.$$

48.3. [4; 17, p. 237] Las tres partes de la condición se expresan mediante las ecuaciones

$$\sin \alpha = \frac{x}{a},$$

$$\sin \beta = \frac{x}{b},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos \gamma.$$

Eliminando a y b se obtiene

$$x^2 = \frac{c^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma}.$$

48.4. [4; Cf. 18, p. 203, ejer. 17] En el tetraedro, la altura es un cateto del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es una de las aristas. Si la arista tiene longitud a, el otro cateto del triángulo tiene longitud $a/\sqrt{3}$ (dos tercios de la altura de una cara). Como la altura es $r_1 + r_2$, el resultado será

$$r_1 + r_2 = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

El centro del tetraedro se encuentra sobre su altura, y el segmento de longitud r_2 que lo une con el vértice opuesto del triángulo rectángulo es la hipotenusa de un segundo triángulo rectángulo cuyos catetos tienen longitudes r_1 and $a/\sqrt{3}$. Por lo tanto

$$r_2^2 - r_1^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Dividiendo por la ecuación anterior obtenemos el sistema

$$r_2 - r_1 = \frac{a\sqrt{6}}{6},$$

$$r_2 + r_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

cuya solución es $r_1 = a\sqrt{6}/12$ y $r_2 = a\sqrt{6}/4$. En consecuencia $r_1 : r_2 = 1{:}3$.

En el cubo, si b es la longitud de una arista, entonces $r_2 = b/2$ y $r_3 = b\sqrt{3}/2$, luego $r_2 : r_3 = 1 : \sqrt{3}$ y $r_1 : r_2 : r_3 = 1 : 3 : 3\sqrt{3}$.

SOLUCIONES DE 1949

49.1. [5; 21, p. 192] Si *s* es un número de la sucesión, *s* debe ser de la forma

$$11 + 100m = 4(25m + 2) + 3,$$

donde *m* es un entero no negativo, y por lo tanto, el resto de dividir *s* por 4 es 3. Pero los cuadrados tienen la forma $4n^2$ o $4n^2 + 4n + 1$, con lo que los restos de dividir por 4 son 0 y 1, respectivamente.

49.2. [5; Cf. 18, p. 9, ejer. 5]

A. Los valores de *l* de 1 a 9 inclusive corresponden a 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1 triángulos, respectivamente, o $5^2 = 25$ en total.

B. Una ley general sería

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \quad \text{o} \quad \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

según si *n* is impar o par. Una ley uniforme válida para ambos casos es: el entero más próximo a $(n + 1)^2/4$.

49.3. [5; 19, p. 161]

A. Sea *a* el lado del triángulo equilátero. Uniendo el punto interior al triángulo con los tres vértices, este queda dividido en tres triángulos cuyas áreas suman el área del triángulo completo: $ax/2 + ay/2 + az/2 = ah/2$. Divida por $a/2$.

B. Un punto interior a un tetraedro regular de altura *h* dista *x, y, z, w* de las cuatro caras, respectivamente. Así que $x + y + z + w = h$. La prueba es análoga: divida el tetraedro regular en cuatro tetraedros.

C. La relación sigue siendo válida en ambos casos (A y B) para puntos exteriores, siempre que las distancias *x, y, z* (y *w*) se tomen con el signo adecuado: más (+) si mirando desde el punto se ve el lado (la cara) desde el interior, menos (−) si se ve desde el exterior. La prueba es esencialmente la misma.

SOLUCIONES DE 1950

50.1. [6; 18, p. 116] La ley general es:

$$1 - 4 + 9 - 16 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

El paso de n a $n + 1$ requiere que verifiquemos que

$$(-1)^n (n+1)^2 = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2} - (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

50.2. [6; Cf. 17, pp. 234–235, prob. 7] Cualquiera que sea la posición, los dos lados del ángulo deben pasar por dos vértices del cuadrado. Mientras pasen por el mismo par de vértices, el vértice del ángulo se mueve a lo largo de un arco de círculo (por el teorema sugerido en la pista). Por lo tanto, cada uno de los lugares requeridos consiste en varios arcos de círculo: 4 semicírculos en el caso A y 8 cuartos de círculo en el caso B. (Véase la figura en [17, p. 244]).

50.3. [6; Cf. 17, p. 235, prob. 8] Los 13 ejes se pueden clasificar como sigue:

a. 4 ejes, cada uno de los cuales pasa por dos vértices opuestos; ángulos de 120° y 240°;

b. 6 ejes, cada uno de los cuales pasa por los puntos medios de dos aristas opuestas; ángulo de 180°

c. 3 ejes, cada uno de los cuales pasa por el centro de dos caras opuestas; ángulos de 90°, l80° y 270°.

Las longitudes son $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ y 1, respectivamente, y el promedio es

$$\frac{4\sqrt{3} + 6\sqrt{2} + 3}{13} = 1{,}42.$$

SOLUCIONES DE 1951

51.1. [7; 17, p. 237] Denotemos con a, b y c los lados, siendo el último la hipotenusa. Las tres partes de la condición se expresan así:

$$a + b + c = 60,$$

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

$$ab = 12c.$$

Observando que

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

obtenemos

$$(60 - c)^2 = c^2 + 24c,$$

de donde $c = 25$ y o bien $a = 15$, $b = 20$ o bien $a = 20$, $b = 15$ (en ambos casos es el mismo triángulo).

51.2. [7; 19, p. 161] El cuadrilátero debe ser convexo. Denotemos I, II, III, IV los triángulos en los que es dividido por sus diagonales; denotemos (I), (II), (III), (IV) las áreas de los cuatro triángulos, respectivamente; y denotemos p, q, r, s las longitudes de los cuatro segmentos desde los vértices a la intersección de las diagonales. Nómbrelos y numérelos de manera «cíclica», de tal modo que el lado de longitud p sea común a IV y I, q a I y II, r a II y III y s a III y IV; I se oponga a III y II to IV, y $p + r$ sea la longitud de una diagonal y $q + s$ la de la otra. Supongamos que p y q forman el ángulo α. Entonces

$$2(\mathrm{I}) = pq \sin \alpha,$$

$$2(\mathrm{II}) = qr \sin \alpha,$$

$$2(\mathrm{III}) = rs \sin \alpha,$$

$$2(\mathrm{IV}) = sp \sin \alpha.$$

En consecuencia:

A. (I) (III) = (II) (IV).

B. La base de I es paralela a la de III si, y solo si, $p/q = r/s$, o bien (II) = (IV).

C. El cuadrilátero es un paralelogramo si, y solo si, $p = r$ y $q = s$, o bien (I) = (II) = (III) = (IV).

51.3. [7; Cf. 20, p. 51, ejer. 2.54] Sea *h* la altura común y sean *a* y *b* los radios de las bases inferior y superior del tronco, respectivamente. Entonces, el radio del cilindro será (*a* + *b*)/2, y la diferencia del volumen del tronco menos la del cilindro,

$$\pi h \left[\frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \right] = \frac{\pi h (a-b)^2}{12},$$

es positiva a menos que *a* = *b*, caso en el que ambos sólidos son el mismo.

SOLUCIONES DE 1952

52.1. Como $A + B + C = 180°$, probar que $A < (B + C)/2$ es equivalente a probar que $A < (180° - A)/2$ o que $A < 60°$. Pero $A < 60°$ equivale a que $\cos A > 1/2$, lo que parece sugerir que hay que usar la ley de los cosenos.

Por hipótesis, $b + c > 2a$. Elevando al cuadrado ambos miembros y aplicando la ley de los cosenos llegamos a que

$$b^2 + 2bc + c^2 > 4(b^2 + c^2 - 2bc \cos A)$$

o bien

$$8bc \cos A > 3b^2 + 3c^2 - 2bc.$$

Restando $4bc$ de ambos miembros llegamos a que

$$4bc\,(2 \cos A - 1) > 3(b - c)^2 \geq 0.$$

Por lo tanto $\cos A > 1/2$.

52.2. [19, p. 162; Cf. 17, pp. 210–211, and 21, pp. 2–7] En cada una de las cuatro propuestas, el volumen del tronco sería, respectivamente,

I. $[(a + b)/2]^2\, h$,

II. $[(a^2 + b^2)/2]\, h$,

III. $[a^2 + b^2 + (a + b)^2/4]\, h/3$,

IV. $[a^2 + b^2 + ab]\, h/3$.

Si $b = a$ el tronco se convierte en un prisma de volumen a^2h: las cuatro propuestas coinciden en el resultado correcto. Si $b = 0$ el tronco se convierte en una pirámide de volumen $a^2h/3$: solo la propuesta IV da este resultado, de modo que las restantes deben ser incorrectas.

Para demostrar que IV es correcta en general, denotemos con x la altura de la pequeña pirámide que hay que seccionar de la pirámide grande para obtener el tronco. Si los volúmenes del tronco, la pirámide grande y la pequeña son F, A y B, respectivamente, entonces

$$F = A - B = \frac{a^2(x + h)}{3} - \frac{b^2x}{3} = \frac{a^2h + (a^2 - b^2)x}{3}.$$

Una sección plana de la figura que contenga la altura y sea paralela a uno de los lados de la base contiene triángulos semejantes cuyos lados están en la relación

$$\frac{x}{x+h} = \frac{b}{a},$$

con lo que

$$x = \frac{bh}{a-b}.$$

Substituyendo este valor de x en la expresión de F obtenemos

$$F = [a^2h + \frac{a^2-b^2}{a-b}bh]\frac{1}{3} = [a^2 + b^2 + ab]\frac{h}{3}.$$

52.3. Supongamos que x, y, z son enteros. Sea 2^k, con $k \geq 0$, la mayor potencia de 2 que divide a x, y, z, de manera que $x = 2^kx'$, $y = 2^ky'$ y $z = 2^kz'$. Entonces, sustituyendo en la ecuación dada y dividiéndola por 2^{2k} obtenemos

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 2^{k+1}x'y'z'.$$

Como el miembro derecho es par, el izquierdo debe serlo también, así que o bien x', y', z' son todos pares, o bien solo uno de ellos lo es. Pero si x', y', z' no son todos nulos (y si uno lo es lo son todos), no pueden ser todos pares, porque 2 no es un factor común. supongamos que x' es par y que y' y z' son impares. Restando $(x')^2$ de ambos lados de la ecuación anterior obtenemos

$$(y')^2 + (z')^2 = x'(2^{k+1}y'z' - x').$$

Tanto $(y')^2$ como $(z')^2$ son de la forma $4n^2 + 4n + 1$, así que el resto de dividir el miembro de la izquierda por 4 es 2, mientras que el miembro de la derecha es divisible por 4 (tanto x' como la expresión entre paréntesis son pares), lo que es una contradicción.

SOLUCIONES DE 1953

53.1. [8; 9; Cf. 17, p. 234, prob. 3]

A. El menor número posible de monedas que puede haber en un bolsillo es, obviamente, 0. El siguiente menor número es al menos 1, el siguiente 2…, y el número de ellas en el décimo y último bolsillo es al menos 9. Por lo tanto, se necesitan al menos

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$$

monedas para conseguir que el número de ellas sea distinto en cada bolsillo. Blas solo tiene 44, así que no puede conseguirlo.

B. En el caso general, el problema tiene solución si

$$n \geq 0 + 1 + 2 + \ldots + (p - 1) = \frac{p(p-1)}{2}.$$

No tendrá solución si

$$n \leq \frac{p(p-1)}{2} - 1 = \frac{(p+1)(p-2)}{2}$$

53.2. [8; 9; 17, p. 237] La ley general es:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

El paso de n a $n + 1$ requiere que

$$\frac{n+1}{(n+2)!} = -\frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)!},$$

o sea,

$$\frac{n+2}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!},$$

lo que se cumple para todo $n = 1, 2, 3,\ldots$

53.3. [8; 9; 17, pp. 235–236] Observe que las ecuaciones primera y cuarta están relacionadas del mismo modo que las ecuaciones segunda y tercera: el miembro izquierdo tiene los mismo coeficientes, pero en orden inverso, y los miembro derechos son opuestos. Así que sumando las ecuaciones primera y cuarta y las ecuaciones segunda y tercera obtenemos

$$\begin{aligned} 6(x+u) + 10(y+v) &= 0, \\ 10(x+u) + 10(y+v) &= 0, \end{aligned}$$

que da como resultado $x + u = 0$ e $y + v = 0$. Substituyendo $-x$ por u y $-y$ por v en las ecuaciones originales obtenemos

$$\begin{aligned} -4x + 4y &= 16, \\ 6x - 2y &= -16. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x = -2$, $y = 2$, $u = 2$, $v = -2$.

53.4. [8; 9; Cf. 20, p. 49, ejer. 2.35]

A. Para derivar las ecuaciones, consideraremos x y los ángulos α, β, γ, δ como dados, y l como incógnita. A partir del triángulo ΔUVG obtenemos GV en términos de x, $\alpha + \beta$ y γ (ley de los senos). A partir del triángulo ΔVUH obtenemos HV en términos de x, α y $\gamma + \delta$ (ley de los senos). A partir del triángulo ΔGHV obtenemos l en términos de GV, HV y δ (ley de los cosenos), así que utilizando las expresiones de GV y HV llegamos a

$$l^2 = x^2\,(A + B - C),$$

donde

$$A = \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta + \gamma)},$$

$$B = \frac{\sin^2\beta}{\sin^2(\beta + \gamma + \delta)},$$

$$C = \frac{2\sin(\alpha + \beta)\sin\beta\cos\delta}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)\sin(\beta + \gamma + \delta)}.$$

B. En el caso particular en que $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$, $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \pi/2$, la ecuación anterior da $x = l$, como debe ser. También se puede considerar el caso en que $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$, pero el valor de $\alpha + \beta$ es indeterminado, y el caso en el que δ, γ, β y α se sustituyen por α, β, γ y δ, respectivamente. Finalmente [véase 17, pp. 202–205], se puede hacer una «comprobación dimensional».

C. La incógnita y uno de los datos intercambian los papeles.

SOLUCIONES DE 1954

54.1. [10; 17, p. 237] El lado derecho de la n-ésima fila parece ser n^3 y el izquierdo una suma de n términos. El último término de esta suma es el número impar $2m - 1$, donde

$$m = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Por lo tanto, el último número de la suma del lado izquierdo debería ser

$$2m - 1 = n^2 + n - 1.$$

El primer término de la suma considerada se puede obtener de dos formas: primero, retrocediendo $n - 1$ pasos desde el último término, y segundo, avanzando un paso desde el último término de la fila anterior:

$$(n^2 + n - 1) - 2(n - 1) = n^2 - n + 1,$$

$$[(n-1)^2 + (n-1) - 1] + 2 = n^2 - n + 1.$$

Pero $(n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \ldots + (n^2 + n - 1)$ es la suma de n términos sucesivos de una progresión aritmética cuya diferencia es 2. Esa suma es n^3.

(Una comprobación rápida consiste en observar que la n-ésima fila consta de n términos cuya media, o término medio, es n^2.)

54.2. [10; 17, pp. 237–238] El perímetro del hexágono está formado por $6n$ líneas de frontera de longitud 1 y contiene $6n$ vértices. Por lo tanto

$$V = 1 + 6(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 3n^2 + 3n + 1.$$

Mediante 3 diagonales que pasan por su centro, el hexágono se divide en 6 triángulos equiláteros (grandes). Inspeccionando cualquiera de ellos

$$T = 6(1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1) = 6n^2.$$

Los T triángulos reúnen $3T$ aristas, de las cuales cada arista interna de longitud 1 está contada dos veces, mientras que cada arista del perímetro solo está contada una vez. Luego

$$2L = 3T + 6n, \quad L = 9n^2 + 3n$$

(Del teorema de Euler sobre poliedros se sigue que $T + V = L + 1$.)

54.3. [10; 20, p. 54] Desarrollando el lado derecho de la hipotética identidad e igualando los coeficientes correspondientes se obtiene

$$aA = bB = cC = 1, \quad (1)$$

$$bC + cB = cA + aC = aB + bA = 0. \quad (2)$$

De (2) se deduce que

$$bC = -cB, \quad cA = -aC, \quad aB = -bA,$$

y multiplicando estas tres ecuaciones se sigue que

$$abcABC = -abcABC,$$

o bien

$$abcABC = 0.$$

Sin embargo, se sigue de (1) que

$$abcABC = 1,$$

por lo que la hipotética identidad es imposible.

SOLUCIONES DE 1955

55.1. [11; 17, p. 234] El trozo de tierra deseado está acotado por dos meridianos y dos paralelos. Como el arco de un paralelo que intercepta dos meridianos dados decrece a medida que el paralelo se aleja del ecuador, el centro de la tierra que quiere Benito debe estar en el ecuador; no puede estar en España.

55.2. [11; 20, p. 54]

A. Comparando los coeficientes de las mismas potencias a ambos lados de la identidad se obtiene

$$1 = p^2, \quad 4 = 2pq, \quad -2 = q^2 + 2pr, \quad -12 = 2qr, \quad 9 = r^2.$$

Las primeras tres ecuaciones, resueltas en sucesión, determinan los dos sistemas de soluciones

$$p = 1,\ q = 2,\ r = -3,$$

y

$$p = -1,\ q = -2,\ r = 3,$$

ambos soluciones también de las dos ecuaciones restantes.

B. Por lo general, un sistema con más ecuaciones que incógnitas no suele tener solución.

55.3. [11; 17, p. 236; Cf. 20, pp. 53–54, ejer. 2.60–2.61]

A. Benito, Pablo y Pedro han viajado la misma distancia, por lo tanto

$$ct_1 - ct_2 + ct_3 = ct_1 + pt_2 + pt_3 = pt_1 + pt_2 + ct_3.$$

De la segunda ecuación se sigue que

$$(c - p)t_1 = (c - p)t_3.$$

Dado que estamos suponiendo que $c > p$, esta ecuación implica $t_1 = t_3$, o sea, Pedro camina tanto como Pablo. De la primera ecuación se sigue que
De la segunda ecuación se sigue que

$$(c - p)t_3 = (c + p)t_2,$$

de donde

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{t_3}{t_2} = \frac{c + p}{c - p}.$$

Así que el progreso por hora es

$$\frac{c(t_1 - t_2 + t_3)}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{c(c + 3p)}{3c + p}.$$

B.
$$\frac{t_2}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{c - p}{3c + p}.$$

C. En el caso extremo $p = 0$, A da como resultado $c/3$ y B da 1/3. Si $p = c$, A da c y B da 0. Intuitivamente, estos valores son razonables.

55.4. [11; 17, p. 235] La base de la pirámide es un polígono de n lados. En el caso A, las n aristas laterales de la pirámide son iguales; en el caso B, las alturas (desde el ápice) de sus n caras laterales son iguales. Dibuje la altura de la pirámide y una su extremo inferior con los n vértices de la base en el caso A, y con los extremos inferiores de las alturas en de las n caras laterales en el caso B. En ambos casos se obtienen n triángulos rectángulos semejantes. Uno de los catetos de estos triángulos (la altura de la pirámide) es común, y la hipotenusa (una arista lateral en el caso A y una altura lateral en el caso B) tiene la misma longitud en cada caso. En consecuencia, el tercer lado de los triángulos semejantes debe ser también igual. Como están trazados desde el mismo punto (el extremo inferior de la altura) en el mismo plano (la base), forman n radios de un círculo circunscrito a (caso A) o inscrito en (caso B) la base de la pirámide. En el caso B, solo queda probar que los n radios mencionados son perpendiculares a los respectivos lados de la base, lo que se sigue de un conocido teorema de geometría sólida.

SOLUCIONES DE 1956

56.1. [12; 17, p. 234] Toda figura plana con un centro de simetría se puede dividir mediante una línea recta que pase por su centro en dos partes idénticas, y por tanto con la misma área. La línea requerida debe pasar por el centro de simetría.

56.2. [12; Cf. 17, p. 238, prob. 20, and 20, p. 97, ejer. 3.84] Denote el número de formas de pagar n céntimos como

A_n si solo se usan monedas de 1 céntimo,
B_n si se usan monedas de 1 y 5 céntimos,
C_n si se usan monedas de 1, 5 y 10 céntimos,
D_n si se usan monedas de 1, 5, 10 y 25 céntimos,
E_n si se usan monedas de 1, 5, 10, 25 y 50 céntimos,

(Ahora verá por qué se usa la notación E_n). Considere el caso de C_n. Si no se usan monedas de 10 céntimos, el número de formas buscado es B_n. Si se usa al menos una moneda de 10 céntimos, el resto, $n - 10$ céntimos, se deben pagar en monedas de 1, 5 y 10 céntimos. Por lo tanto,

$$C_n = B_n + C_{n-10}.$$

Análogamente,

$$B_n = A_n + C_{n-5},$$

$$D_n = C_n + D_{n-25},$$

$$E_n = D_n + E_{n-50},$$

considerando cualquiera de las cantidades A_n, B_n,…, E_n igual a 0 si n es negativo. Las fórmulas nos permiten calcular estas cantidades de manera *recursiva*, o sea, empleando valores de n menores o letras del alfabeto anteriores. Esto produce la siguiente tabla, que contiene, entre otras cantidades, los valores de E_{25} (= D_{25}) y E_{50}.

n	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
A_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_n	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
D_n	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	49
E_n	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	50

56.3. [12; Cf. 21, pp. 26–28, sec. 8.4, y p. 32, ejer. 8.3] Llamemos α al ángulo opuesto al lado a del Δ. Los lados iguales de los triángulos isósceles con bases b y c tienen longitudes $b/\sqrt{3}$ y $c/\sqrt{3}$, respectivamente. Dos de estos lados forman con s un triángulo cuyo ángulo opuesto a s es $\alpha + \pi/3$. La ley de los cosenos, aplicada a este triángulo, da como resultado

$$3s^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha + \pi/3).$$

Aplique la ley de los cosenos al triángulo dado Δ para eliminar $bc\cos\alpha$ y haga $bc\sin\alpha = 2T$, donde T es el área de Δ, y obtenga

$$6s^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\,T.$$

Como T es simétrica en a, b y c, también lo es esta expresión.

56.4. [12] Sean $A, B, C, D,\ldots, J$ las personas en torno a la mesa, y $a, b, c, d,\ldots, j$ las cantidades que reciben, respectivamente; B está a la derecha de A, C ta la derecha de $B,\ldots$, A a la derecha de J. La regla se expresa mediante las ecuaciones

$$b = \frac{a+c}{2}, \quad c = \frac{b+d}{2}, \quad d = \frac{c+e}{2},\ldots, \quad a = \frac{j+b}{2}.$$

Primera solución. De las ecuaciones anteriores se sigue que

$$b - a = c - b = d - c = \ldots = a - j,$$

de modo que la cantidad recibida por cualquiera excede de la de su vecino de la izquierda la misma cantidad. Esta cantidad debe ser cero ya que

$$(b - a) + (c - b) + (d - c) + \ldots + (a - j) = 0.$$

Solo hay una forma de distribuir el dinero: todo el mundo recibe lo mismo.

Segunda solución. Alguna persona (o personas) deben recibir la mayor cantidad. Supongamos que esa persona es B. Entonces, ninguno de los números $a,\ldots, j$ es mayor que b, y, en particular,

$$b - a \geq 0, \quad b - c \geq 0.$$

Y sin embargo, por la condición,

$$b - a = -(b - c).$$

En consecuencia, tanto $b - a$ como $b - c$ debes valer cero. Así que c también recibe la cantidad máxima, así como d, etc. Por lo tanto $a = b = c = \ldots = j$.

SOLUCIONES DE 1957

57.1. [13; 20, p. 55] Benito tiene x sellos, los y séptimos de los cuales están en el segundo libro; x e y son enteros positivos,

$$\frac{2x}{10} + \frac{yx}{7} + 303 = x$$

y por lo tanto

$$x = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 101}{28 - 5y}.$$

El denominador de la derecha debe ser positivo e *impar* ya que debe dividir al numerador, que es impar. Esto deja tres posibilidades: $y = 1, 3, 5$. Solo el último caso produce un divisor del numerador. Por lo tanto, las incógnitas quedan determinadas unívocamente: $y = 5$, $x = 3535$.

57.2. [13; Cf. 20, p. 34, sec. 2.5 (2)] Un plano que pasa por h y por el vértice trirrectangular interseca el tetraedro en un triángulo rectángulo de hipotenusa h, un cateto p y el otro, digamos, k, que es la altura perpendicular al lado a en el triángulo de área A. Por lo tanto

$$h^2 = k^2 + p^2 \quad \text{y} \quad A = \frac{1}{2}ak.$$

Como $2D = ah$, de las últimas dos ecuaciones se sigue que

$$4D^2 = a^2h^2 = a^2(k^2 + p^2) = 4A^2 + a^2p^2.$$

Utilizando una ecuación establecida anteriormente (en la primera parte de la pista), obtenemos que

$$4D^2 = 4A^2 + (r^2 + q^2)p^2 = 4A^2 + (rp)^2 + (pq)^2.$$

Utilizando otras dos de las ecuaciones establecidas anteriormente y dividiendo por 4, obtenemos finalmente

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

análoga al teorema de Pitágoras.

57.3. [13; 20, p. 50] Considere, para empezar, el caso especial más simple de todos: el triángulo equilátero. La simetría nos puede inducir a sospechar que en este caso las cuatro piezas triangulares serán también equiláteras. Sin embargo, de ser eso cierto, las caras de las piezas triangulares deben ser *paralelas* a las caras del triángulo dado. Esta observación conduce a una configuración que resuelve el caso general así como el particular del triángulo equilátero: mediante cuatro paralelas a uno de los lados del triángulo dado, divida cada

uno de los otros dos lados en cinco segmentos iguales. Realizando esta operación tres veces, una para cada del triángulo dado, dividimos este en 25 triángulos congruentes semejantes a él. De esos 25 triángulos, fácilmente seleccionamos los cuatro mencionados en el problema; el área de cada uno de ellos es 1/25 del área del triángulo dado. (La unicidad de esta solución no está demostrada).

SOLUCIONES DE 1958

58.1. [14; 20, p. 139] Descomponemos 32118 en sus factores primos: $2 \times 3 \times 53 \times 101$. Solo hay seis formas de descomponer este número en un producto de tres factores, todos distintos de 1:

$$\begin{array}{ll} 6 \times 53 \times 101 & 2 \times 101 \times 159 \\ 3 \times 101 \times 106 & 2 \times 53 \times 303 \\ 3 \times 53 \times 202 & 2 \times 3 \times 5353 \end{array}$$

Solo la primera de estas descomposiciones tiene dos factores entre 4 y 100, por lo tanto, el capitán tiene 6 hijos, tiene 53 años y la longitud de su barco es de 101 metros.

58.2. [14; Cf. 20, p. 153, ejer. 6.24] Denotando $x + y + u + v = s$ (una suma que no cambia con ninguna permutación de las variables x, y, u, v) y sumando las cuatro ecuaciones obtenemos $s = -3$ y el sistema se reduce a las cuatro ecuaciones

$$s - v = 4,$$

$$s - x = -5,$$

$$s - y = 0,$$

$$s - u = -8.$$

Por lo tanto, $x = 2$, $y = -3$, $u = 5$ y $v = -7$.

58.3. [14; 19, p. 214, ejer. 16.6.1] La proposición I es falsa; las II y III son ciertas.

Cuando las tres alturas, las tres medianas o los tres bisectores están por entero dentro del triángulo (como siempre ocurre, excepto en el caso de las alturas en un triángulo obtuso o rectángulo), se dan las siguientes situaciones: A, B, C son los vértices del triángulo; A', B', C' son los puntos interiores de los lados opuesto, respectivamente, y tenemos que examinar la suma $AA' + BB' + CC'$. Como la suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado,

$$AA' + A'B > AB,$$

$$AA' + A'C > AC.$$

Sumando estas desigualdades obtenemos

$$2AA' + BC > AB + CA,$$

y análogamente

$$2BB' + CA > BC + AB,$$

$$2CC' + AB > CA + BC.$$

Sumando estas tres desigualdades obtenemos

$$2(AA' + BB' + CC') > AB + BC + CA.$$

Por lo tanto, las proposiciones II y III son ciertas y la I is lo es para triángulos agudos.

Como contraejemplo a la proposición I, considere un triángulo isósceles de base b y ángulos de la base iguales a A. Según A tiende a 0 cada altura tiende también a 0, en tanto que el perímetro tiende a $2b$. Un ángulo A lo suficientemente pequeño refuta la proposición I.

58.4. [14] Los casos observados sugieren la identidad

$$1!1 + 2!2 + 3!3 + \ldots + n!n = (n + 1)! - 1.$$

Esta identidad se puede demostrar por inducción o bien del siguiente modo:

$$(n + 1)! - n! = n!(n + 1) - n! = n!n$$

Por lo tanto, sustituyendo $n = 1,2,3,\ldots, n$ obtenemos

$$1!1 = 2!2 - 1!1,$$

$$2!2 = 3!3 - 2!2,$$

$$3!3 = 4!4 - 3!3,$$

$$\ldots$$

$$n!n = (n + 1)! - n!.$$

Sumando estas ecuaciones llegamos, tras unas cancelaciones evidentes, al resultado deseado.

SOLUCIONES DE 1959

59.1. [20, p. 53] Utilizaremos la siguiente notación:

u es la velocidad de Alfredo,
v es la velocidad de Blas,
t_1 es el tiempo transcurrido desde la salida al primer encuentro,
t_2 es el tiempo transcurrido desde la salida al segundo encuentro,
d es la longitud de la calle.

Entonces

$$ut_1 = a, \qquad ut_2 = d + b,$$
$$vt_1 = d - a, \qquad vt_2 = 2d - b.$$

A. Expresando u/v de dos formas distintas obtenemos

$$\frac{a}{d-a} = \frac{d+b}{2d-b}.$$

Por lo tanto, una vez descartada la solución nula, encontramos que $d = 3a - b$.

B. Alfredo camina más deprisa; concretamente: $u/v = 3/2$.

59.2. [20, p. 50] Para el primer patrón $100\pi/4$ y para el segundo $100\pi/(2\sqrt{3})$, aproximadamente 78.54% y 90.69%, respectivamente. La transición de una gran mesa (cuadrada) a la mesa infinita realmente involucra el concepto de límite, pero no insistiremos en este punto ya que el resultado es intuitivo.

59.3. Notemos que si n es mayor que 1, el cociente de $n^{n-1} - 1$ y $n - 1$ da como resultado

$$n^{n-2} + n^{n-3} + \ldots + n + 1.$$

Podemos ver esta suma como el resultado de sustituir en el polinomio

$$R(x) = (1 + x)^{n-2} + (1 + x)^{n-3} + \ldots + (1 + x) + 1$$

la x por $n - 1$. Al desarrollar $R(x)$ en potencias de x (por ejemplo, mediante la fórmula del binomio), el término independiente de x es $R(0) = n - 1$, por lo tanto

$$R(x) = Q_{n-3}(x)\ \mathrm{x} + n - 1,$$

donde $Q_{n-3}(x)$ es un polinomio de grado $n - 3$ cuyos coeficientes son *enteros*. Ahora sustituimos x por $n - 1$ y obtenemos

$$\begin{aligned} n^{n-1} - 1 &= (n-1)R(n-1) \\ &= (n-1)^2[Q_{n-3}(n-1) + 1]. \end{aligned}$$

59.4. Sean A, B y C los vértices del triángulo dado, y sean a, b y c las longitudes de los lados opuestos, respectivamente. Considere el lado del hexágono opuesto al lado de longitud a y denotemos su longitud a'. Dibujando varias figuras y considerando casos extremos comprobamos que tenemos que demostrar que $a' = 2a_m$, donde a_m es la longitud de la mediana de ΔABC dibujada sobre el lado de longitud a. Extienda AC a D de manera que $AD = b$, y una D con B. Ahora $\Delta CDB \sim \Delta CAA'$, donde A' es el punto medio del lado BC, de manera que $AA' = a_m$. Por lo tanto, la mediana de ΔABC de longitud a_m es paralela a BD y a_m = BD/2. Pero el triángulo cuyos lados tiene longitudes a', b y c es congruente a ΔABD (dos lados y un ángulo interno). Por lo tanto, $a_m = a'/2$.

SOLUCIONES DE 1960

60.1. [15; 20, p. 55] Si el precio reducido es x céntimos y hay y bolígrafos en el lote, $x < 50$ y $xy = 3193$. Ahora bien, $3193 = 31 \times 103$ es un producto de dos factores primos, de manera que tiene exactamente cuatro divisores distintos: 1, 31, 103 y 3193. Si *suponemos* que x es un entero, $x = 1$ o 31. Si *suponemos además* que $x > 1$, then $x = 31$.

60.2. [15; 20, p. 50] Denotemos las distancias de P a los cuatro lados de un rectángulo x_1, y_1, x_2, y_2 en orden cíclico. Eligiendo la notación de manera apropiada,

$$a^2 = y_2^2 + x_1^2, \quad b^2 = x_1^2 + y_1^2,$$

$$c^2 = y_1^2 + x_2^2, \quad d^2 = x_2^2 + y_2^2,$$

de modo que

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$

En nuestro caso, $a = 5$, $b = 10$, $c = 14$, así que

$$d^2 = 25 - 100 + 196 = 121, \quad d = 11.$$

Fíjese que los datos a, b y c, que determinan d, son insuficientes para determinar los lados $x_1 + x_2$ e $y_1 + y_2$ del rectángulo.

60.3. [15] Escribamos la relación

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

y sustituyamos sucesivamente $\alpha/2$, $\alpha/4$ y $\alpha/8$ por α. Eso da lugar a

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{2 \sin(\alpha/2)},$$

$$\cos \frac{\alpha}{4} = \frac{\sin(\alpha/2)}{2 \sin(\alpha/4)},$$

$$\cos \frac{\alpha}{8} = \frac{\sin(\alpha/4)}{2 \sin(\alpha/8)}.$$

Multiplicando las tres ecuaciones se obtiene, tras unas cancelaciones evidentes, la identidad buscada. Si multiplicamos n ecuaciones sucesivas en vez de solo tres, el resultado que se obtiene es

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} \ldots \cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin \alpha}{2^n \sin(\alpha/2^n)}.$$

Alternativamente, uno podría llegar a intuir esta fórmula, y luego demostrarla por inducción.

60.4. [15; 20, p. 51] Sea O el volumen del octaedro, T el del tetraedro y a la longitud de una de las aristas. *Primera solución*. El octaedro se divide, mediante un plano apropiado, en dos pirámides regulares congruentes cuya base cuadrada común tiene un área a^2. La altura de una de estas pirámides es $a/\sqrt{2}$ (la «figura plana clave» pasa a través de una diagonal de la base), de modo que

$$O = 2\,\frac{a^2}{3}\,\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Haga pasar un plano a través de la altura (de longitud h) del tetraedro y a través de una arista coterminal. La intersección (la figura plana clave) está dividida por la altura en dos triángulos rectángulos, de los cuales se sigue que

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{2a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{2a^2}{3},$$

de modo que

$$T = \frac{1}{3}\,\frac{a}{2}\,\frac{a\sqrt{3}}{2}\,\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Finalmente, $O = 4T$.

Segunda solución. Considere el tetraedro regular de arista $2a$; su volumen es 2^3T. Cuatro planos, cada uno de los cuales pasa por los puntos medios de tres de las aristas que se unen en el mismo vértice, lo dividen en cuatro tetraedros regulares, cada uno con un volumen T, más un tetraedro regular de volumen O. Por lo tanto,

$$4T + O = 8T,$$

lo que de nuevo implica $O = 4T$.

SOLUCIONES DE 1961

61.1. [16; Cf. 20, p. 153, ejer. 6.24] La expresión simétrica más simple en x, y, z es su suma. Sumando las tres ecuaciones propuestas obtenemos

$$10000\,x + 10000\,y + 10000\,z = 20000,$$

que se reduce a $x + y + z = 2$ Restando

$$2134\,x + 2134\,y + 2134\,z = 4268$$

de cada una de las tres ecuaciones iniciales obtenemos tres nuevas ecuaciones, cuyas soluciones son $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$, respectivamente.

61.2. [16; 20, p. 149] La condición se describe fácilmente mediante las dos ecuaciones

$$c + v + b + g = 14,$$

$$c + 2v + 3b + 4g = 30.$$

Restando la primera a la segunda obtenemos

$$v + 2b + 3g = 16,$$

que prueba que o bien v y g son ambas pares o ambas impares. Así que habrá que examinar solo cuatro casos:

v	g	$b = 8 - (v + 3g)/2$
3	5	−1
5	3	1
2	4	1
4	2	3

Tan solo el último caso es admisible. Por lo tanto, $g = 2$, $b = 3$, $v = 4$, $c = 5$, y los nombres de las señoras son Ana García, Beatriz Blanco, Carolina Verde y Diana Castaño.

61.3. [16; 21, p. 193] Si $x = 0$, la segunda (o la tercera) ecuación da $y^2z^2 = 0$, con lo que alguna de las incógnitas y o z debe ser también 0. Así que, o biien x, y, z son las tres distintas de 0, o al menos dos de ellas se anulan. Si cualesquiera dos incógnitas son nulas, las tres ecuaciones se cumplen.

Consideremos, pues, el caso en que ninguna de las tres incógnitas es 0. Dividiendo por xyz se llega al sistema

$$+ \qquad = a,$$

$$\begin{array}{ccccc} & \frac{zx}{y} & & \frac{xy}{z} & \\ \frac{yz}{x} & & + & \frac{xy}{z} & = b, \\ \frac{yz}{x} & + \frac{zx}{y} & & & = c. \end{array}$$

Sumando las tres ecuaciones y dividiendo por 2, llegamos a

$$\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} = \frac{a+b+c}{2}.$$

Sustrayendo de esta ecuación cada una de las tres ecuaciones del sistema anterior se obtiene

$$\frac{yz}{x} = \frac{-a+b+c}{2},$$

$$\frac{zx}{y} = \frac{a-b+c}{2},$$

$$\frac{xy}{z} = \frac{a+b-c}{2}.$$

El producto de estas tres ecuaciones da

$$xyz = \frac{(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}{8},$$

que, dividida por cada ecuación del sistema precedente, da como resultado (después de extraer la raíz cuadrada)

$$x = \pm\frac{[(a-b+c)\,(a+b-c)]^{1/2}}{2},$$

$$y = \pm\frac{[(-a+b+c)\,(a+b-c)]^{1/2}}{2},$$

$$y = \pm\frac{[(-a+b+c)\,(a-b+c)]^{1/2}}{2}.$$

Hemos de tener en cuenta, sin embargo, los dos valores de cada raíz cuadrada. Concentrémonos en un caso de especial interés: supongamos que *a*, *b* y *c* son las longitudes de los tres lados de un triángulo. En ese caso, la ecuación para el producto *xyz* nos asegura que este es positivo, y por lo tanto las únicas combinaciones de signos admisibles son:

$$\begin{array}{ll} x & + \; + \; - \; - \\ y & + \; - \; + \; - \\ z & + \; - \; - \; + \end{array}$$

61.4. [16; Cf. 20, p. 51, ejer. 2.49] Haga pasar un plano por la altura de la pirámide y el punto medio de una de las aristas (de longitud a) de su base. La intersección de este plano con la pirámide es un triángulo isósceles que puede usarse como figura clave: su altura es h, sus lados iguales tienen longitud l (siendo l la altura de una cara lateral de la pirámide) y su base es $2b$ (siendo b la altura de uno de los seis triángulos equiláteros congruentes que componen la base de la pirámide). El área de la base es

$$\frac{S}{4} = \frac{6ab}{2},$$

el área de la superficie lateral es

$$\frac{3S}{4} = \frac{6al}{2},$$

y por lo tanto, $l = 3b$. Usando la figura clave obtenemos

$$h^2 + b^2 = l^2 = 9b^2,$$

con lo que

$$b^2 = \frac{h^2}{8}.$$

También tenemos que

$$b^2 + \frac{a^2}{4} = a^2,$$

luego

$$a^2 = \frac{4b^2}{3} = \frac{h^2}{6}.$$

En consecuencia,

$$S = 12ab = h^2\sqrt{3}.$$

SOLUCIONES DE 1962

62.1. [Cf. 21, p. 162, ejer. 15.36] Tenemos que encontrar los puntos de intersección de dos elipses congruentes, simétricas la una de la otra con respecto a la recta $x = y$. Restando las ecuaciones obtenemos $x^2 = y^2$. Hay cuatro puntos de intersección: (6, 6), (−6, −6), (2, −2), (−2, 2).

62.2. Multiplicando los cuatro productos se obtiene una expresión simétrica en *a, b, c* y *d*. Si podemos demostrar que

$$4a(1 - b)\ 4b(1 - c)\ 4c(1 - d)\ 4d(1 - a) \leq 1$$

sabremos que al menos uno de los productos es menor que 1. Sabemos que $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$ y $0 < d < 1$. Consideremos el producto $4a(1 - a)$, que es positivo ya que sus factores son todos positivos. ¿Cuál es su valore máximo? Una estimación obvia nos dice que es 1, valor que se alcanza cuando $a = ½$. Para comprobarlo, observe que

$$1 - 4a(1 - a) = (1 - 2a)^2 \geq 0,$$

y que la igualdad solo se alcanza cuando $a = ½$. Del mismo modo, los productos $4b(1 - b)$, $4c(1 - c)$ y $4d(1 - d)$ son también positivos y no mayores que uno. En consecuencia,

$$4a(1 - a)\ 4b(1 - b)\ 4c(1 - c)\ 4d(1 - d) \leq 1$$

que, con los términos reordenados, implica

$$4a(1 - b)\ 4b(1 - c)\ 4c(1 - d)\ 4d(1 - a) \leq 1.$$

62.3.

A. Como $\angle B'CA = \angle A'CB$, $\angle C = 90°$, C se encuentra en el segmento $A'B'$. ΔABC y $\Delta ABC'$ son ambos triángulos rectángulos, que se pueden inscribir en un círculo de diámetro AB. $\angle ACC'$ y $\angle BCC'$ abarcan arcos iguales del círculo, por lo que son iguales. Por lo tanto, $\angle B'CC' = \angle A'CC' = 90°$.

B. Si los lados del triángulo tienen longitudes *a, b* y *c*, entonces $B'C$ tiene longitud $b/\sqrt{2}$, $A'C$ tiene longitud $a/\sqrt{2}$ y, por lo tanto, $A'B$ tiene longitud $(a + b)/\sqrt{2}$.

Sea D el vértice opuesto a A en el cuadrado de lado b. Entonces $\Delta ACC' \sim \Delta ADB$ (pares de ángulos correspondientes son iguales). Por lo tanto, $CC' : AC$

$= DB : AD$, y CC' también tiene longitud $(a + b)/\sqrt{2}$.

(Una demostración, que emplea transformaciones, del caso general en que el triángulo no necesariamente es rectángulo, aparece en [22, pp. 96–97].)

62.4. [21, p. 188]

A. Haga pasar un plano por la arista de longitud b y el punto medio M de la arista opuesta. La intersección de este plano con el tetraedro es un triángulo isósceles que se puede usar como figura clave: su base tiene longitud b, sus lados iguales tienen longitud $a\sqrt{3}/2$ (son las alturas de las caras equiláteras del tetraedro), y por tanto su altura es $\sqrt{3a^2 - b^2}/2$. Por simetría, el centro O de la esfera circunscrita cae sobre la línea que une M con el punto medio B de la base de este triángulo. Por otro lado, la línea que une O con el centro C de una de las caras equiláteras del tetraedro es perpendicular a esa cara. El punto C divide cada altura (o mediana) de la cara equilátera en la proporción 1 : 2. Por lo tanto CM tiene longitud $a\sqrt{3}/6$. El triángulo OCM es semejante a cada uno de los triángulos que MB divide la figura clave. Por lo tanto, las razones entre los lados correspondientes son la misma. Si x es la longitud de OB, tendremos

$$\frac{\sqrt{3a^2 - b^2}/2 - x}{a\sqrt{3}/6} = \frac{a\sqrt{3}/2}{\sqrt{3a^2 - b^2}/2}$$

Despejando x en esta ecuación se obtiene

$$x = \frac{2a^2 - b^2}{2\sqrt{3a^2 - b^2}}.$$

si r es el radio de la esfera circunscrita,

$$r^2 = x^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{(2a^2 - b^2)^2}{4(3a^2 - b^2)} + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2(4a^2 - b^2)}{4(3a^2 - b^2)},$$

y por lo tanto

$$r = \frac{a}{2}\,\frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{\sqrt{3a^2 - b^2}}.$$

Observe que el denominador se anula cuando $b = a\sqrt{3}$. Este es un caso límite, ya que, para el tetraedro considerado en el problema, $b < a\sqrt{3}$.

B. El radio de la superficie esférica se puede determinar marcando cuatro puntos que formen los vértices de dos triángulos equiláteros congruentes que compartan una arista que haga de «bisagra». Sea a la longitud de las aristas de dichos triángulos. Haciendo que los cuatro puntos caigan sobre la superficie de la esfera y midiendo la distancia b entre los dos puntos que no comparten una arista, uno puede usar el

resultado A para calcular el radio de la esfera determinada por dichos cuatro puntos.

SOLUCIONES DE 1963

63.1. [21, p. 188] Cada vértice del triángulo equidista de de uno de los tres puntos en que los lados del triángulo son tangentes al círculo inscrito. Lamemos *A*, *B* y *C* a los vértices opuestos a los lados *a*, *b* y *c*, respectivamente. Entonces, la distancia de *C* a los dos puntos tangentes más cercanos es *d*/2, la de *B* a los dos puntos tangentes más cercanos es $a - (d/2)$ y la de *A* a los dos puntos tangentes más cercanos es $b - (d/2)$. Como

$$a - (d/2) + b - (d/2) = c,$$

se sigue que

$$a + b = c + d.$$

63.2. [Cf. 21, p. 191, ejer. 3.65.1]

Primera solución. Reescriba la expresión como

$$n\,[(n-2)\,(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2)]$$

y observe que la expresión entre paréntesis es el producto de cinco enteros consecutivos y que $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Dados cinco enteros consecutivos cualesquiera, uno de ellos debe ser múltiplo de 5; por lo tanto, 5 divide la expresión. Además, uno de los enteros debe ser múltiplo de 4, y como al menos otro más debe ser par, 8 es un divisor de la expresión. Si *n* is múltiplo de 3, entonces n^2 is múltiplo de 9, así que 9 divide la expresión. Si *n* no es múltiplo de 3, entonces lo son o bien $n - 2$ y $n + 1$, o bien $n - 1$ a $n + 2$, luego 9 divide la expresión. Como la expresión es divisible por 5, 8 y 9, y como estos tres números no tienen factores comunes, la expresión debe ser divisible por su producto.

Segunda solución. Como $2n = (n + 3) + (n - 3)$,

$$2n^2(n^2-1)(n^2-4) = (n-2)\,(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3) + (n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2),$$

con lo que dividiendo por 6! = 720 obtendremos

$$\frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{360} = \binom{n+3}{6} + \binom{n+2}{6}$$

que es la suma de dos números enteros.

63.3. [Cf. 21, p. 163, ejer. 15.37–15.38] Restando, sucesivamente, la segunda ecuación de la primera, la tercera de la segunda y la primera de la tercera,

llegamos al sistema

$$\begin{aligned} -5x^2 + 4y^2 + z^2 &= 0,\\ x^2 - 5y^2 + 4z^2 &= 0,\\ 4x^2 + y^2 - 5z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Podemos eliminar z^2 multiplicando la primera ecuación de este sistema por -4 y sumándosela a la segunda. Podemos eliminar x^2 multiplicando la segunda ecuación de este sistema por -4 y sumándosela a la tercera. Con esto obtenemos

$$x^2 = y^2 = z^2.$$

Sustituyendo en el sistema original da como resultado ocho soluciones:

$$\begin{array}{cc} (1,1,1), & (-1,-1,-1),\\ (3,-3,-3), & (-3,3,3),\\ (-3,3,-3), & (3,-3,3),\\ (-3,-3,3), & (3,3,-3). \end{array}$$

63.4. [Cf. 21, p. 162, ejer. 15.29–15.30] Sea r el radio del círculo inscrito en la base del prisma. La base está compuesta por seis triángulos equiláteros cuyos lados tienen longitud $2r/\sqrt{3}$. El volumen del prisma es

$$6\,\frac{r^2}{\sqrt{3}}\;2r = 4\sqrt{3}\,r^3.$$

El área de la superficie del prisma es

$$2\cdot 6\,\frac{r^2}{\sqrt{3}} + 6\,\frac{2r}{\sqrt{3}}\;2r = 4\sqrt{3}\,r^2 + 8\sqrt{3}\,r^2 = 12\sqrt{3}\,r^2.$$

Sea a la longitud de una arista del octaedro regular cuyo volumen es $4\sqrt{3}\,r^3$. El octaedro se puede dividir en dos pirámides congruentes cuya base común es un cuadrado de lado a y cuya altura e la mitad de la diagonal del cuadrado de lado a. Por lo tanto, el volumen del octaedro es

$$2\cdot\frac{1}{3}\;a^2\;\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{3}\,r^3,$$

luego

$$a = \sqrt{6}\,r.$$

El área de la superficie del octaedro es

$$8\;\frac{\sqrt{3}\,a}{2}\;\frac{a}{2} = 2\sqrt{3}\,a^2 = 2\sqrt{3}\,6r^2 = 12\sqrt{3}\,r^2.$$

Por lo tanto, las dos áreas son iguales.

Dados dos sólidos con igual número de caras y el mismo volumen, lo natural sería esperar que si uno de ellos es regular, el área de su superficie sea menor que la del otro.

SOLUCIONES DE 1964

64.1. [21, p. 188] Sea s la longitud del lado de la base del prisma (la tarta). Por lo tanto, la altura del prisma es $5s/16$, el volumen $5s^3/16$ y la superficie cubierta de crema (5 caras) $9s^2/4$. Para el trozo de tarta en forma de prisma recto de base cuadrada, el área de la base será $s^2/4$ y su volumen $5s^3/(16 \cdot 9)$. Por tanto, la altura debe ser $5s/36$, el cociente entre el volumen y el área de la base. Como el lado de la base de este prisma es $s/2$, el cociente requerido será

$$\frac{5s}{36} \cdot \frac{2}{s} = \frac{5}{18}.$$

En el lado superior de la tarta (un cuadrado) marcamos un cuadrado concéntrico. Los lados del cuadrado pequeño son paralelos a los del grande y tienen la mitad de su longitud. Los vértices correspondientes se unen con segmentos rectilíneos y lo mismo se hace con los puntos medios de lados correspondientes.

Cada uno de los 8 trozos con crema en el lateral es un prisma recto del que se ha cortado otro prisma recto más pequeño; la base de ambos prismas, grande y pequeño, es un triángulo rectángulo isósceles.

Otra solución puede obtenerse rotando el trozo cuadrado 45° sobre su centro.

64.2. *Primera solución*. El término de la sucesión dada que tiene $2n$ dígitos es

$$9 + 8(10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1}) + 4(10^n + 10^{n+1} + \ldots + 10^{2n-1}),$$

que podemos factorizar como

$$1 + (8 + 4 \cdot 10^n)(1 + 10 + \ldots + 10^{n-1}),$$

que, usando la fórmula de la suma de una progresión geométrica, se convierte en

$$1 + 4(10^n + 2)(10^n - 1)/(10 - 1),$$

expresión que se simplifica a

$$\frac{1 + 4 \cdot 10^n + 4 \cdot 10^{2n}}{9} = m^2,$$

siendo

$$m = \frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} = 1 + 6\frac{10^n - 1}{9}$$

el entero $666\cdots67$, un número de n dígitos.

Segunda solución. Explorar algunos ejemplos,

$$49 = 7^2, \quad 4489 = 67^2, \quad 444889 = 667^2,$$

nos lleva a conjeturar que el n-ésimo término tiene la forma $(666\cdots67)^2$, donde $666\cdots67$ es un número de n dígitos. Para probar la conjetura se puede empezar por comprobar que

$$666\cdots67 \times 6 = 4000\cdots002,$$

$$666\cdots67 \times 7 = 4666\cdots669,$$

y utilizar esto en el algoritmo de multiplicación de enteros en notación decimal.

64.3. Aquí van algunos ejemplos fáciles, todos de triángulos rectángulos:

LADOS			ÁREA
3	4	5	6
1	1	$\sqrt{2}$	1/2
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	1
$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	12

Hay muchos otros ejemplos, pero los triángulos no rectángulos resultan menos ilustrativos.

64.4. *Primera solución*. Esencialmente, estamos considerando aquí tres conjuntos A, B y C, y sus intersecciones. Si representamos cada conjunto mediante puntos dentro de un círculo (diagrama de Venn o, de forma más apropiada, círculo euleriano), los tres círculos, cada uno de los cuales solapa parcialmente los otros dos, dividen el plano en ocho regiones. Una de ellas, la exterior a los tres círculos, es infinita. El problema es encontrar el número de individuos que pertenecen a esta región infinita. Comenzando por la región interior a los tres círculos (en el extremo derecho de la tabla) y moviéndonos hacia el exterior (hacia la izquierda de la tabla), uno puede calcular cuántos individuos hay en cada región. Denotemos con $\overline{X}$ el conjunto de individuos fuera del conjunto X; con XY la intersección de los conjuntos X e Y, y con $[X]$ el número de individuos dentro del conjunto X. Entonces, el número de individuos en la unión de A, B y C vendrá dado por

$$[ABC] + [\overline{A}BC] + [A\overline{B}C] + [AB\overline{C}] + [\overline{AB}C] + [\overline{A}B\overline{C}] + [A\overline{BC}] = 1 + 2 + 5 + 1 + 0 + 1 + 5 = 15,$$

así que el número de estudiantes requerido (los que aprueban las tres materias) es $41 - 15 = 26$.

Segunda solución. Usemos la misma notación que en la solución anterior. El número de individuos en la unión de *A*, *B* y *C* también está dado por

$$[A] + [B] + [C] - [AB] - [AC] - [BC] + [ABC].$$

Un individuo que se encuentre solamente en uno de los tres conjuntos está contado solo una vez en las primeras tres entradas, y en ningún sitio más. Un individuo que se encuentre solamente en dos de los tres conjuntos está sumado dos veces en las primeras tres entradas y restado una vez en las tres siguientes. Un individuo que se encuentre en los tres conjuntos está sumado tres veces en las primeras tres entradas, restado tres veces en las tres siguientes y sumado una vez en la última entrada. Así pues, la expresión propuesta cuenta todos los individuos que debe contar, y solo una vez cada uno (y se puede generalizar a un número mayor de conjuntos).

Aplicando la expresión general a nuestro caso, obtenemos

$$12 + 5 + 8 - 2 - 6 - 3 + 1 = 15$$

estudiantes que han suspendido al menos una materia, de modo que $41 - 15 = 26$ han aprobado las tres.

(*Nota:* El problema que aparecía en la hoja de problemas del examen original contenía un error: en lugar de un 4 aparecía un 2. Aunque de este modo los datos resultaban inconsistentes, los participantes fueron capaces de emplear métodos esencialmente equivalentes a los arriba descritos, y sus argumentos fueron juzgados de acuerdo con ello).

64.5. [21, p. 195]

A. Nuestra tarea se simplifica enormemente si echamos mano de una proposición clásica de geometría (Euclides VI 3): Los segmentos de la base, *p* y *q*, guardan la misma proporción que los lados adyacentes, *a* y *b:*

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b}.$$

Como $p + q = c$,

$$p = \frac{ac}{a+b}, \quad q = \frac{bc}{a+b}.$$

Aplicando el teorema de los cosenos dos veces a dos triángulos diferentes, que contienen ambos el ángulo α opuesto al lado *a* del triángulo original:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$d^2 = b^2 + q^2 - 2bq \cos \alpha.$$

Eliminando cos α y despejando d^2 obtenemos

$$d^2 = ab\left[1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]$$

(Si no conoce o no recuerda esa proposición acerca de la razón p/q, se puede descubrir aplicando relaciones trigonométricas a los tres triángulos. Se sigue, de hecho, del teorema de los senos aplicado dos veces a los dos triángulos más pequeños.)

B. Un *caso particular*. Si $a = b$, el triángulo dado es isósceles de base c, y la fórmula produce

$$d^2 = a^2 - \frac{c^2}{4}.$$

Un *caso límite*. Si el triángulo dado degenera colapsando en el segmento c, entonces $a + b = c$ y la fórmula produce $d = 0$.

La fórmula también se puede «comprobar dimensionalmente» [17, pp. 202−205].

SOLUCIONES DE 1965

65.1. [21, p. 192] Si hace una lista con las doce descomposiciones de 72 en tres factores y calcula la suma de los factores, comprobará que la única suma que aparece dos veces es 14 (= 2·6·6 = 3·3·8). Por lo tanto, el número de la casa es el 14. Dado que hay un hijo *mayor,* las edades son 3, 3 y 8.

65.2. [21, p. 187] Denotemos a y b las longitudes de los catetos. El hexágono está formado por tres cuadrados, de áreas a^2, b^2 y c^2, respectivamente, y cuatro triángulos de igual área A. O bien puede introducir segmentos auxiliares en la figura para demostrar que uno de los triángulos obtusos tiene altura a y base b y el otro tiene altura b y base a, o bien puede usar trigonometría:

$$A = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ac \sin\beta = \frac{1}{2}ac \sin(180^\circ - \beta).$$

Por tanto, el área del hexágono es

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4A = 2c^2 + 4A.$$

65.3. [Cf. 21, pp. 146–149, and p. 158, ejer. 15.3]

A. El triángulo de vértices (1, 1), (0, 1), (½,½) y lados situados sobre las rectas $y = 1$, $x = y$, con $x + y > 1$.

B. Dos lados del triángulo descrito en A sobre las rectas $y = 1$ y $x = y$.

C. El arco de círculo $x^2 + y^2 = 1$ interior al triángulo descrito en A.

D. La parte del triángulo descrito en A por encima del arco descrito en C.

E. La parte del triángulo descrito en A por debajo del arco descrito en C.

El punto (1,1) representa el triángulo equilátero; el punto $(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$ representa el triángulo rectángulo isósceles; el punto $(1/2,\ \sqrt{3}/2)$ representa el triángulo de 30°60°90°, y el lado del triángulo descrito en A sobre la recta $x + y = 1$ representa triángulos degenerados.

65.4. [Cf. 21, p. 139, ejer. 14.24] El resto $r(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que 2:

$$r(x) = a + bx + cx^2.$$

Por lo tanto

$$x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81} = q(x)(x^3 - x) + a + bx + cx^2.$$

Para $x = -1$, 0 y 1, esta expresión da, respectivamente:

$$
\begin{aligned}
-5 &= a - b + c \\
0 &= a \\
5 &= a + b + c
\end{aligned}
$$

de donde $a = 0$, $b = 5$, $c = 0$, y el resto buscado es $5x$.

REFERENCIAS

1. R. Creighton Buck, A look at mathematical competitions, *American Mathematical Monthly,* 66 (1959) 201–212.
2. Department of Mathematics, Stanford University, The Stanford University Mathematics Examination, *American Mathematical Monthly,* 53 (1946) 406–409.
3. ———, Stanford University Mathematics Examination, *American Mathematical Monthly,* 54 (1947) 430.
4. ———, Stanford University Competitive Examination, *American Mathematical Monthly,* 55 (1948) 448.
5. ———, Stanford University Competitive Examination in Mathematics, *American Mathematical Monthly,* 56 (1949) 496–497.
6. ———, Stanford University Competitive Examination in Mathematics, *American Mathematical Monthly,* 57 (1950) 651–652.
7. ———, Stanford University Competitive Examination in Mathematics, *American Mathematical Monthly,* 59 (1952) 127.
8. ———, Stanford University Competitive Examination in Mathematics, *American Mathematical Monthly,* 60 (1953) 571–572.
9. G. Pólya, The 1953 Stanford Competitive Examination: problems, solutions, and comments, *California Mathematics Council Bulletin*, (1) 11 (1953) 15–17.
10. ———, The 1954 Stanford Competitive Examination: problems and solutions, *California Mathematics Council Bulletin*, (2) 12 (1954) 7–8.
11. ———, The 1955 Stanford Competitive Examination in Mathematics: problems, solutions, and comments, *California Mathematics Council Bulletin*, (2) 13 (1955) 15–17.
12. ———, The 1956 Stanford Competitive Examination in Mathematics: solutions and comments, *California Mathematics Council Bulletin*, (2) 14 (1956) 19–22.
13. ———, The 1957 Stanford University Competitive Examination in Mathematics, *California Mathematics Council Bulletin*, (2) 15 (1957) 18–21.
14. ———, The 1958 Stanford-Sylvania Competitive Examination in Mathematics, *California Mathematics Council Bulletin,* (1) 16 (1958) 18–20.

15. ———, The 1960 Stanford-Sylvania Competitive Examination in Mathematics, *California Mathematics Council Bulletin*, (2) 18 (1960) 16–17.

16. ———, The 1961 Stanford-Sylvania Competitive Examination in Mathematics, *California Mathematics Council Bulletin*, (2) 19 (1961) 10–11.

17. ———, *How to Solve It,* 2nd edition, Doubleday Anchor A 93, 1957, Princeton Paperback, 1971.

18. ———, *Mathematics and Plausible Reasoning,* Vol. 1, Princeton Univ. Press, 1954.

19. ———, *Mathematics and Plausible Reasoning,* Vol. 2, 2nd edition, Princeton Univ. Press, 1968.

20. ———, *Mathematical Discovery,* Vol. 1, Wiley, 1962.

21. ———, *Mathematical Discovery,* Vol. 2, corrected printing, Wiley, 1968.

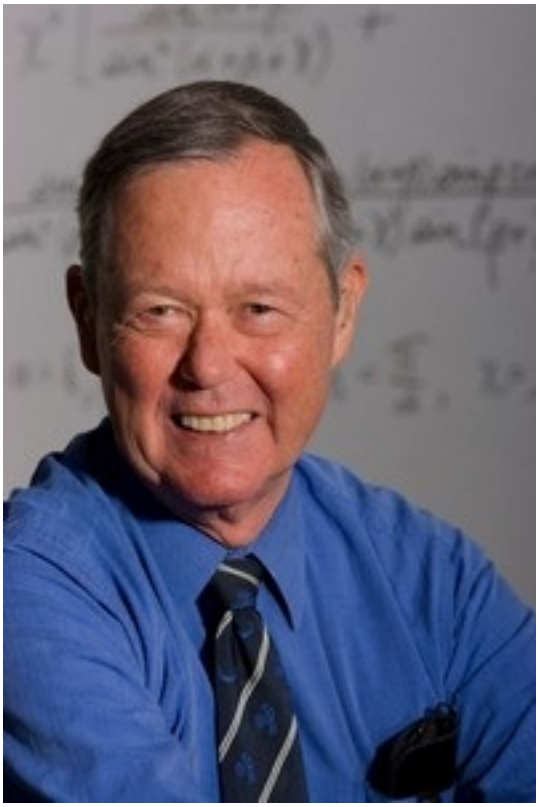
22. H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, Random House, 1967.

23. *Hungarian Problem Book I, II*, Random House, 1963.

24. G. Pólya and J. Kilpatrick, The Stanford University Competitive Examination in Mathematics, *American Mathematical Monthly,* 80 (1973) 627–640.

GEORGE (GYÖRGY) PÓLYA (Budapest, Hungría, 1887 – Palo Alto, Estados Unidos, 1985) fue un famoso matemático húngaro. Ejerció como profesor de matemáticas de 1914 a 1940 en el Politécnico de Zúrich y de 1940 a 1953 en la Universidad de Stanford. Realizó contribuciones fundamentales en combinatoria, teoría de números, análisis numérico y teoría de la probabilidad. También destacó por su trabajo en heurística y educación matemática.

Ha sido descrito como uno de *Los Marcianos*, nombre con el que se conocía al grupo de peculiares científicos húngaros radicados en Estados Unidos en la época de la Segunda Guerra Mundial.



JEREMY KILPATRICK (Fairfield, Iowa, Estados Unidos, 1935 – Athens, Georgia, Estados Unidos, 2022) fue un matemático estadounidense. Recibió el Bachillerato en matemáticas y un Master en educación en la Universidad de California, Berkeley, así como un Master en matemáticas y un Doctorado en educación en la Universidad de Stanford. Antes de 1975, Jeremy enseñó en el Teachers College, Universidad de Columbia, en nueva York.

Sus intereses en investigación incluyeron, entre otros muchos, la competencia de los docentes en la enseñanza de las matemáticas, el cambio del currículo de matemáticas y su historia, la evaluación de las matemáticas y la historia de la investigación en educación matemática.

Recibió la Medalla Félix Klein 2007 en honor a su trayectoria en educación matemática de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI), y el Premio a la Trayectoria 2003 por Servicio Distinguido a la Educación Matemática del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM).